

ÁLGEBRA LINEAL

1. Los Números Complejos

1.1. Halla el módulo y el argumento de los números complejos:

$$4 - 3i, (3 - 4i)^{-1}, (2 - i)^5 \text{ y } \frac{1 - i}{1 + i}$$

1.2. Dibuja los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

$$\text{a) } \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2 \quad \text{b) } \operatorname{Re} \frac{z-1}{z-3} = 0 \quad \text{c) } \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$$

$$\text{d) } |z+2| = 2 \quad \text{e) } |z-1| = |z+1| \quad \text{f) } \bar{z} = z^{-1}$$

1.3. Prueba las siguientes igualdades:

$$\text{a) } |z| = |\bar{z}| \quad \text{b) } \bar{\bar{z}} = z \quad \text{c) } \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{d) } \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w \quad \text{e) } \overline{-z} = -\bar{z} \quad \text{f) } \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$

1.4. Para cualquier número complejo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, prueba que: $z, -z, \overline{1/z}, \overline{-1/z}$ y 0 están alineados (o lo que es lo mismo, están sobre una misma recta).

1.5. a) Sea $z \neq 1, -1$ y con $|z| = 1$. Prueba que $\frac{1+z}{1-z}$ es un complejo imaginario puro.

b) Sea z un complejo de módulo 1. Prueba que $z + z^{-1}$ es un número real.

1.6. Determina los números complejos z que verifican:

$$\text{a) } z^2 - 3z + 4 = 0 \quad \text{b) } z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0 \quad \text{c) } z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

1.7. a) Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ tiene parte real igual a -1 , entonces el número complejo $\frac{z}{z^2}$ pertenece a la circunferencia de centro $-\frac{1}{2}$ y radio $\frac{1}{2}$.

b) Describe geoméricamente la aplicación $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) z$.

c) Describe geoméricamente la aplicación $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) z + (1 + i)$.

1.8. Calcula: a) $\sqrt[3]{-i}$ b) $\sqrt[3]{-8i}$ c) $\sqrt[5]{-1-i}$ d) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

e) Determina los números complejos tales que su cuadrado coincide con alguna de sus raíces cuadradas.

1.9. a) Demuestra que las raíces n -ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces n -ésimas de 1.

b) Prueba que el producto de dos raíces n -ésimas de la unidad es de nuevo una raíz n -ésima de la unidad.

c) Prueba que la inversa multiplicativa de una raíz n -ésima de la unidad es de nuevo una raíz n -ésima de la unidad.

1.10. Si $1, z_1$ y z_2 son las tres raíces cúbicas distintas de 1, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $z_1^{-1} = 1$, b) $z_1^{-1} = z_1$, c) $z_1^{-1} = z_2$, d) $z_1^{-1} \neq 1$ y $z_1^{-1} \neq z_2$.

1.11. a) Prueba que para cualquier número natural n , el polinomio $z - 1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

b) Demuestra que las raíces n -ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación polinómica $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$. (*Pista:* ¿Cuál es el cociente de la división del apartado a)?)

c) Prueba que si m y n son dos números naturales y m divide a n , entonces el polinomio $z^m - 1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

1.12. Sea n un número natural tal que $n \geq 2$. Usando el Ejercicio 11.b), prueba que:

a) $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$. b) $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

1.13. Expresa $\cos 3t$ y $\sin 3t$ como polinomios de $\sin t$ y $\cos t$.

1.14.* Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos. Decimos que la serie es *convergente* si las series de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ son convergentes. Se dice que la serie converge a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ también lo es.

b) Prueba que $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

c) Comprueba que $e^{it} = \cos t + i \sin t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deduce que $-1 = e^{i\pi}$.

1.15.* Para $t \in \mathbb{R}$, prueba las siguientes igualdades: a) $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ b) $|e^{it}| = 1$ c) $\overline{e^{it}} = e^{-it}$

d) $\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ e) $\sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$ f) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi}$

(*Indicación:* Se define $\int f(t) + ig(t)dt := \int f(t)dt + i \int g(t)dt$).

1.16. a) Si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz del polinomio con coeficientes reales $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, prueba que \bar{w} también lo es.

b) Utiliza la ecuación $z^2 + zi + 2 = 0$, para ver que el apartado anterior no es cierto en general si los coeficientes son complejos.

1.17. Encuentra las soluciones de la ecuación $z^3 - (1 - 2i)z^2 - z + (1 - 2i) = 0$, si se sabe que $1 - 2i$ es una solución de la misma.

1.18. Se pide descomponer el polinomio $z^4 + 1$ como

- a) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en \mathbb{Q} y de grado lo menor posible.
- b) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en \mathbb{R} y de grado lo menor posible.
- c) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en \mathbb{C} y de grado lo menor posible.

Haz lo mismo para los polinomios: $z^3 + z^2 - z + 2$ y $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1$.