ÁLGEBRA LINEAL

2. Sistema lineales y matrices

2.1. Resolver por Gauss:

a) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+z=8 \\ -x+y+z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y = 14 \\ y+z=10 \\ x +z=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2y+3z=20 \\ 3x+y=16 \end{cases}$

2.2. Resolver por Gauss:

a) $\begin{cases} 2x-y+3z=13 \\ 3x-5y+z=-5 \\ 4x-7y+z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+2y-3z=-2 \\ 2x-2y+5z=5 \\ 3x+4y+2z=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$

2.3. Resolver por Gauss:

a) $\begin{cases} x+y+z+t=10 \\ x-y+z-t=-2 \\ 3x-y+3z-t=6 \\ 7x-5y+7z-5t=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-y+z+t=0 \\ x+3y+z+3t=0 \end{cases}$

2.4. Resolver por Gauss:

a) $\begin{cases} x+y-z-u+v=0 \\ x+2y+z+2u-v=0 \\ -x+y+5z+7u-5v=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+2y+t=0 \\ y+2z-3t=0 \end{cases}$

2.5. Una industria produce tres productos X, Y y Z, utilizando dos tipos de materias primas, S y T. Para la manufactura de cada kilo de X se usa 1 gramo de S y 2 gramos de T, para cada kilo de Y, 1 gramo de S y 1 gramo de T y, para cada kilo de Z, 1 gramo de S y 4 gramos de T. El precio de venta del kilo de cada uno de los productos X, Y y Z es 2, 3 y 5 euros respectivamente. Con la venta de toda la producción de X, Y y Z fabricada con 1 kilo de S y 2 kilos de T, la industria recaudó 2500 euros. ¿Cuántos kilos de cada uno de los productos X, Y y Z se vendieron?

2.6. En los siguientes apartados se dan una serie de puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Encuentra funciones polinómicas, del grado n que se indica, de modo que sus respectivas gráficas pasen por dichos puntos.

a) $(0,1)$ y $(1,3)$; $\quad n=1$.

b) $(0,1),(1,3)$ y $(-1,1)$; $\quad n=2$.

c) $(0,1),(1,3),(-1,1)$ y $(2,13)$; $\quad n=3$.

2.7. Dado el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

a) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema que resulte sea incompatible.

b) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema que resulte sea compatible indeterminado. Resolver el sistema formado.

c) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema que resulte sea compatible determinado. Resolver el sistema formado.

2.8. Calcular el valor de m para que el siguiente sistema tenga alguna solución distinta de la trivial $(0,0,0)$. Resolverlo por Gauss para ese valor de m.

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -2x - 4y + mz = 0 \\ 4x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

2.9. Discutir y resolver, en los casos en que sea posible, por Gauss

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x + y + z = 3 \\ -5x + 5y + 2z = m \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} mx - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = -3 \end{cases}$$

2.10. Considérese el conjunto $U = \{(\lambda, \lambda+\beta, \lambda-\beta, \lambda+2\beta) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$. ¿Pertenece $(1,2,1,1)$ al conjunto U? Determinar qué ecuaciones deben satisfacer las coordenadas de (x,y,z,w) para pertenecer al conjunto U.

2.11. Para las siguientes matrices, calcular su forma normal de Hermite por filas, es decir, la forma escalonada reducida, y su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.12. Hallar la forma normal de Hermite por filas, es decir, la forma escalonada reducida, y el rango:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.13. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

efectúa las operaciones: $A \cdot B$, $\quad (4A) \cdot (-3B)$, $\quad AA^{\mathrm{t}}$, $\quad B^{\mathrm{t}}B$.

2.14. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Las siguientes igualdades, ¿son ciertas?

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
c) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

2.15. Resuelve la ecuación en X dada por $AX - 2B + C = D$, siendo X una matriz 2×2 y

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.16. Halla todas las matrices que conmuten con la matriz B del ejercicio anterior. Si las matrices X e Y conmutan con B, ¿la matriz XY conmuta con B?

2.17. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\[2ex] 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.18. Calcula la matriz A^n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, siendo:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.19. Calcula

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{44} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{63}.$$

2.20. Consideramos cierto grupo de población que está sufriendo una epidemia. En un día dado, una persona de dicho grupo está sana o está enferma. De las personas que están sanas en un día dado, el 95 % seguirán sanas al día siguiente. De las personas que están enfermas en un día dado, el 55 % seguirán enfermas al día siguiente.

a) Sea x_n el porcentaje de personas sanas en la población total el día n (si el porcentaje es, por ejemplo, el 70 %, entonces $x_n = 0,7$) y sea y_n el porcentaje de personas enfermas en la población total el día n. Encuentra la matriz T tal que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

b) Si cierto día el porcentaje de población enferma es el 20 %, ¿cuál será el porcentaje de enfermos al día siguiente? ¿y al cabo de dos días?

2.21. a) Sea A una matriz cuadrada cualquiera. Demuestra que $A + A^{\mathrm{t}}$ es simétrica mientras que $A - A^{\mathrm{t}}$ es antisimétrica.

b) Sea A una matriz cualquiera. Demuestra que AA^{t} y $A^{\mathrm{t}}A$ son simétricas.

c) Sea A una matriz antisimétrica. Demuestra que A^2 y A^4 son simétricas, mientras que A^3 y A^5 son antisimétricas.

d) Una matriz cuadrada es ortogonal si AA^{t} es igual a la matriz identidad. Si A y B son matrices ortogonales, demuestra que AB también es ortogonal.

2.22. Identifica las transformaciones elementales que se realizan en una matriz $3 \times n$ al multiplicarla por cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.23. Escribe el sistema lineal que hay que resolver para encontrar la inversa de las siguientes matrices. Estudia si efectivamente tienen inversa y calcúlala en caso afirmativo resolviendo el sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.24. Determina cuáles de las siguientes matrices son regulares, es decir, cuáles tienen inversa, y calcula, por Gauss, la inversa de las que lo sean:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -6 & -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}.$$

2.25. Demuestra que si el producto de dos matrices $n \times n$ cuadradas e invertibles conmuta, es decir si $AB = BA$, entonces es cierto que $A^{-1}B = BA^{-1}$.

2.26. Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

2.27. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

encuentra matrices P y Q *regulares* tales que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad PB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

¿Puedes encontrar P y Q regulares?

2.28. Pensemos en un sistema de ecuaciones lineales $n \times n$ y en el método de eliminación de Gauss para resolverlo. Pongámonos de acuerdo en llamar ”operación simple” a toda suma, resta, producto o división de entradas de una matriz.

a) Si el sistema tiene solución única, da una cota para el número máximo de operaciones simples que necesitamos para resolverlo.

b) Si tenemos un ordenador que realiza 10^{10} operaciones por segundo y su hora de servicio cuesta 1000 euros. ¿Cómo de grande puede ser un sistema arbitrario que podamos resolver con 1 euro? ¿Y con 1000 euros?