ÁLGEBRA LINEAL
3. Espacios vectoriales

3.1. Demostrar que el conjunto $A = \left\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ respecto de las operaciones

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3}) &= a + a' + (b + b')\sqrt{3} \\ \alpha(a + b\sqrt{3}) &= \alpha a + \alpha b\sqrt{3}\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. ¿Tiene solución en este conjunto la ecuación $x^2 - 3 = 0$?

3.2. Estudiar si el conjunto $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ respecto de las operaciones

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, 0)\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3.3. Siendo $\vec{u}_1 = (7, -9, 1, -5)$, $\vec{u}_2 = (5, -3, 17, 14)$ y $\vec{u}_3 = (1, 1, 11, 11)$, expresa $\vec{u}_1$ como combinación lineal de $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

3.4. Calcular el valor de a y b para que el vector $\vec{v} = (a, 2, -1, b)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1 = (1, 2, -3, 4)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 0, -2, -3)$.

3.5. Sea λ un elemento de $\mathbb{R}$. Halla los valores de λ para los que el conjunto de vectores $\{(\lambda, 1 - \lambda, 0), (0, \lambda, 1 - \lambda), (1 - \lambda, 0, \lambda)\}$ de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ es linealmente independiente.

3.6. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un conjunto de vectores de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ tal que $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{u}_2 = (-2, 1, 0)$ y $\vec{u}_3 = (1, -1, 0)$. Demostrar que estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $(-2, 0, 0)$ respecto de esta base.

3.7. Encuentra, si es posible, una base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ contenida en el conjunto

$$\{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 5), (1, 1, 3), (1, 2, 1)\}.$$

3.8. Encuentra una base de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot\mathbb{R})$ que contenga al conjunto $\{(1, 2, 3, 4), (1, -2, 3, 1)\}$.

3.9. Sea $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial, y sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. Demostrar que el siguiente conjunto de vectores es también linealmente independiente:

$$\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_3 + \vec{u}_1\}.$$

3.10. Sea $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial. Demostrar que si los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman una base de este espacio, entonces los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ también forman una base del mismo, siendo

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3, \qquad \vec{v}_2 = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_3, \qquad \vec{v}_3 = \vec{u}_2.$$

3.11. Demostrar que el conjunto

$$\left\{1-x, 1+x^2, x^2, 3x-2x^2\right\}$$

es linealmente dependiente en el espacio de los polinomios con coeficientes racionales y grado menor o igual que dos. A partir de dicho conjunto, encontrar un conjunto máximo de vectores linealmente independientes.

3.12. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$.
(a) $S_1 = \{(x, y, z) : x - y + z = 2\}$.
(b) $S_2 = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.
(c) $S_3 = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$.

3.13. Determinar cuánto deben valer a y b para que el vector $\vec{v} = (a, -1, b, -5)$ pertenezca al subespacio vectorial engendrado por los vectores $\vec{u}_1 = (2, 1, 0, -3)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 1, -1, 1)$.

3.14. a) Demostrar que el subconjunto

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \quad \text{y} \quad x + y - z - w = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot\mathbb{R})$.

b) Probar que los vectores $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, -3)$ y $\vec{u}_2 = (0, 0, 1, -1)$ son base de W.

c) Hallar las coordenadas del vector $\vec{u} = (-3, 3, -4, 4)$ respecto de dicha base.

3.15. En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto de los vectores (x, y, z) definido por

$$S = \{(x, y, z) : x - 3y - z = 0 \text{ y } x - y + z = 0\}.$$

Demostrar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1 y hallar una base del mismo.

3.16. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z, w) : x + y + z = 0,\ y - w = 0\} \qquad \text{y} \\ W &= \{(\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, \lambda - \mu, \lambda + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Hallar ecuaciones implícitas y bases de $U \cap W$ y de $U + W$.

3.17. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} U &= L\{(0, 1, 2), (1, 0, 1), (2, 2, 0)\} \qquad \text{y} \\ W &= \{(x, y, z) : x + y = 0,\ z = 0\}. \end{aligned}$$

Hallar ecuaciones implícitas y bases de $U \cap W$ y de $U + W$.

3.18. Hallar: a) Las coordenadas del vector $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ respecto de la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sabiendo que

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \qquad \vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_1, \qquad \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

b) Las coordenadas del vector $\vec{v} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

3.19. Hallar las matrices de los siguientes cambios de base:

a) De la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ a la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, sabiendo que

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \qquad \vec{u}_2 = -\vec{v}_2 - \vec{v}_3, \qquad \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3.$$

b) De la base B' a la base B.

c) Las coordenadas del vector $\vec{w} = (3, 1, 0)_B$ respecto de B' y las de $\vec{x} = (1, 5, 3)_{B'}$ respecto de B.

3.20. Para cada uno de los pares siguientes de bases B y B' de $\mathbb{R}^2$, halla la matriz del cambio de base de la base B a la base B':

(i) $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $B' = \{(1, 3), (3, 1)\}$.
(ii) $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ y $B' = \{(1, -1), (1, 1)\}$.

3.21. Para las siguientes de bases B y B' de $\mathbb{R}^3$, halla la matriz del cambio de base de la base B a la base B':

$$B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\} \quad \text{y} \quad B' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

3.22. Hallar la dimensión de los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generados por los siguientes conjuntos de vectores:

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 1, -1, -1, -1), (2, 0, -2, 0, 1), (3, 1, -3, -1, 0), (5, 1, -5, -1, 1)\}, \\ B &= \{(6, 3, 3, 9, 3), (8, 4, 4, 12, 4), (10, 5, 5, 15, 5)\}, \\ C &= \{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 2, 2, 2, 2), (-6, -5, -4, -3, -2), (5, 6, 7, 8, 9)\}. \end{aligned}$$

3.23. Prueba que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con la suma usual y el producto (por números reales) usual. ¿Qué dimensión tiene? Prueba que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ con la suma y producto usuales. ¿Qué dimensión tiene?

3.24.* Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de la recta real $\mathbb{R}$. Se considera el conjunto de las funciones reales de variable real

$$\mathcal{F}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ función}\}.$$

a) Comprueba que $\mathcal{F}([a, b])$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones de suma de funciones y el producto de un escalar por una función.

b) Sea el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$,

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}.$$

Prueba que $\mathcal{C}([a, b])$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}([a, b])$.

3.25.* La ecuación

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \qquad (*)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son coeficientes conocidos, se denomina *ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden*. Esta ecuación se relaciona con el comportamiento de los circuitos eléctricos RLC. Una solución de esta ecuación es, por definición, una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica la ecuación $(*)$.

a) Comprueba que las funciones $f_1(t) = e^{-t}$ y $f_2(t) = te^{-t}$ son soluciones de la ecuación $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.
b) Sea S el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $(*)$. Prueba que es un subespacio vectorial del conjunto de las funciones reales de variable real.
c) Se puede probar que dados dos valores cualesquiera $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existe una única función f que es solución de $(*)$ y que cumple que $f(0) = c_1$ y $f'(0) = c_2$. Usando lo anterior prueba que S, el conjunto de soluciones de $(*)$, es un espacio vectorial de dimensión 2.
d) Comprueba que las funciones f_1 y f_2 del apartado a) forman una base del conjunto de soluciones de la ecuación $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.