ÁLGEBRA LINEAL

4. Aplicaciones lineales

4.1. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, son lineales:

a) $f(x, y) = (0, 0, x)$
b) $f(x, y) = (y, x + y, y - x)$
c) $f(x, y) = (x + 2y, 0, y + 2x)$
d) $f(x, y) = (x - y, 2, y)$

4.2. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo, son lineales:

a) $f(x, y, z) = (2x, 4y, 3z)$
b) $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$
c) $f(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 2z - x)$
d) $f(x, y, z) = (y, x, 1 - z)$

4.3. Sea f un aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{u}_1) = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$, $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_1 - 4\vec{v}_2 + \vec{v}_3$, siendo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ las correspondientes bases. Halla la imagen del vector $\vec{u} = (-1, 2)$.

4.4. Calcula la matriz asociada a la aplicación lineal f definida entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y, z) = (2x - y, x + y - z)$ respecto de las bases canónicas.

4.5. Se considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que está dada por $f(x, y) = (y, x - y, x + y)$. Halla, respecto de las bases canónicas:

a) La matriz asociada.

b) Una base del núcleo.

c) La dimensión del núcleo.

d) Una base de la imagen.

e) El rango de la aplicación.

f) Comprueba la fórmula $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

4.6. Se dice que un vector $\vec{u}$ es *invariante* por una aplicación lineal $f : V \to V$ si verifica que $f(\vec{u}) = \vec{u}$. Halla todos los vectores invariantes por las aplicaciones lineales de los apartados a), b) y c) del ejercicio 4.2.

4.7. Halla todos los vectores que verifican la igualdad $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, para algún escalar λ, para las aplicaciones lineales de los apartados a), b) c) del ejercicio 4.2.

4.8. Sea f la aplicación lineal de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo, tal que $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $f(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$, donde $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son dos bases de V. Hallar:

a) La matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases B_1 y B_2.

b) La dimensión de $\operatorname{Ker} f$ y el rango de la aplicación.

c) La imagen del vector $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

d) ¿Es la aplicación f inyectiva? ¿Es sobreyectiva? En caso de que f sea biyectiva, calcular la matriz de f^{-1} respecto de las bases B_2 y B_1.

4.9. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ y $(W, +, \cdot\mathbb{R})$ tal que $f(\vec{v}_1) = -\vec{w}_1 - 3\vec{w}_2 + \vec{w}_3 + 3\vec{w}_4$, $f(\vec{v}_2) = \vec{w}_1 - \vec{w}_3$, $f(\vec{v}_3) = \vec{w}_2 - \vec{w}_4$, donde $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base del primer espacio y $B_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ es una base del segundo espacio. Hallar:

a) La imagen del vector $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$.

b) La matriz de la aplicación lineal respecto de las bases B_1 y B_2.

c) El núcleo y el rango de la aplicación lineal.

d) ¿Qué vectores $\vec{v}$ verifican $f(\vec{v}) = \vec{w}_1 - 3\vec{w}_2 - \vec{w}_3 + 3\vec{w}_4$?

Comentario: Al conjunto de vectores que satisfacen la condición del apartado (d) se le denomina *preimagen* por f del vector $\vec{w}_1 - 3\vec{w}_2 - \vec{w}_3 + 3\vec{w}_4$, y se denota por

$$f^{-1}(\{\vec{w}_1 - 3\vec{w}_2 - \vec{w}_3 + 3\vec{w}_4\}).$$

Cuidado, en esta ocasión el símbolo f^{-1} *no* quiere decir aplicación inversa de f. De hecho, en este caso f no tiene aplicación inversa. ¿Podrías decir por qué?

4.10. Sea $\mathcal{P}$ el espacio vectorial real formado por los polinomios en una variable X con coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Para todo polinomio $p(X)$ de $\mathcal{P}$ denotamos por $p'(X)$ su derivada. Consideramos la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ p(X) & \to & p'(X) \end{array}$$

Demuestra que f una aplicación lineal. Determina el núcleo de f. ¿Qué dimensión tiene? Determina la imagen de f. ¿Qué dimensión tiene? ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Calcula la matriz de f respecto de la base $\{1, X, X^2\}$.

4.11. Sea f una aplicación lineal de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo, tal que $f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = -7\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $f(\vec{u}_3) = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$, donde $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de dicho espacio. Halla la matriz de la aplicación lineal f respecto de la base $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$, $\vec{v}_3 = \vec{u}_3$.

4.12. Sean f y g dos aplicaciones lineales de $(U, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo, tales que $f(\vec{u}_1) = \vec{e_1} - 3\vec{e_2}$, $f(\vec{u}_2) = \vec{e_1} - \vec{e_2}$, $g(\vec{e_1}) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, $g(\vec{e_2}) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, siendo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ tres bases del espacio vectorial. Halla:

a) La matriz de la aplicación $g \circ f$ respecto de las bases $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

b) El núcleo y la imagen de $g \circ f$.

c) La imagen del vector $\vec{u} = 4\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

4.13. Sean f y g las aplicaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ tales que $f(1,-1) = (2,-1,2)$, $f(1,2) = (-1,2,2)$, $g(2,1,1) = (7,1,0,2)$ $g(1,-2,0) = (1,-2,2,-1)$, $g(0,1,1) = (1,1,0,4)$. Halla:

a) La matriz de la aplicación $g \circ f$ respecto de las bases canónicas.

b) La dimensión del núcleo de $g \circ f$.

c) El rango de $g \circ f$.

4.14. ¿Existe alguna aplicación lineal f de $\mathbb{R}^{2015}$ a $\mathbb{R}^{2015}$ tal que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$? ¿Y alguna aplicación lineal f de $\mathbb{R}^{2016}$ a $\mathbb{R}^{2016}$ tal que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$?

4.15. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ tal que

$$f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_4, \qquad f(\vec{u}_2) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3, \qquad f(\vec{u}_3) = \vec{v}_3 + \vec{v}_4,$$

donde $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ son bases de los espacios vectoriales. Halla:

a) La matriz de la aplicación lineal respecto de las bases B_1 y B_2.

b) El núcleo de la aplicación.

c) El rango.

4.16. Halla la matriz de la aplicación lineal definida entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ por

$$f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 - \vec{v}_4, \qquad f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3,$$

donde $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ son las bases y se sabe además que el vector $\vec{u}_2$ pertenece al núcleo. Halla una base de $\mathrm{Im} f$.

4.17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que, respecto de las bases $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, su matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se eligen unas nuevas bases $B_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $B_4 = = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \\ \vec{e}_2 = \vec{u}_1 + \ \vec{u}_2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4 \\ \vec{w}_2 = \qquad -\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{w}_3 = \vec{v}_1 \qquad\quad - \vec{v}_3 \\ \vec{w}_4 = \vec{v}_1 \end{array} \right.$$

Halla la matriz de la aplicación lineal f,

a) Respecto de las bases B_1 y B_4.

b) Respecto de las bases B_3 y B_2.

c) Respecto de las bases B_3 y B_4.

4.18. Sea λ un número real, y sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada a las respectivas bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Halla para qué valores de λ el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$ está contenido en la imagen de f.

4.19. Describe geométricamente las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base canónica es una de las matrices siguientes:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (d) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

4.20. Consideramos la base $B = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Describe geométricamente las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base B es una de las matrices A siguientes:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.21.* Se define la aplicación $T : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$ del siguiente modo $T(f) = \int_a^b f(t)dt$ donde $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Prueba que T es una aplicación lineal. Dado $n \in \mathbb{N}$, encuentra n funciones linealmente independientes pertenecientes al núcleo de la aplicación.