ÁLGEBRA LINEAL

5. Rangos y determinantes

5.1. Demuestra, sin necesidad de desarrollarlos, que los determinantes

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

son múltiplos de 5 y de 4 respectivamente.

5.2. Demuestra las igualdades para los determinantes siguientes, que se denominan *determinates de Vandermonde* (y cuya importancia será puesta de manifiesto en el siguiente tema).

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c).$$

Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

5.3. Demuestra la igualdad

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ a & x & x & x \\ b & d & x & x \\ c & e & f & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-d)(x-f).$$

5.4. Demuestra las siguientes igualdades sin desarrollar los determinantes

$$a)\ \begin{vmatrix} b+c & c & b \\ a & c & a+c \\ a & a+b & b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}, \quad b)\ \begin{vmatrix} ab & b^2 & a^2 \\ a+b & 2b & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3,$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ m+n & n+l & l+m \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & l \end{vmatrix}, \quad d)\ \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

5.5. ¿Cuántos menores de orden k se pueden formar de una matriz de m filas y n columnas?

5.6. Resuelve las ecuaciones

$$a)\begin{vmatrix} 3 & x-5 & 1 \\ x+2 & x & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0, \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & x+4 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3x+6 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$c)\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad d)\begin{vmatrix} x & b & c \\ a & x & c \\ a & b & c \end{vmatrix}=0, \quad e)\begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & b & b & b \\ b & b & x & c & c \\ c & c & c & x & d \\ d & d & d & d & x \end{vmatrix}=0$$

5.7. Demuestra que son nulos los determinantes siguientes

$$a)\begin{vmatrix} 14 & 17 & 20 & 23 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 2b-c \\ b & c & a & 2c-a \\ c & a & b & 2a-b \end{vmatrix}, \qquad c)\begin{vmatrix} 1 & a+b & c & d \\ 1 & b+c & d & a \\ 1 & c+d & a & b \\ 1 & d+a & b & c \end{vmatrix}$$

5.8. Calcula los siguientes determinantes de orden n

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}, \qquad b)\begin{vmatrix} 2 & x & x & x & \cdots & x \\ x & 2 & x & x & \cdots & x \\ x & x & 2 & x & \cdots & x \\ x & x & x & 2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

5.9. Calcula los siguientes determinantes de orden n

$$a)\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ k & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}, \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & m & m & m & \cdots & m \\ m & 1 & m & m & \cdots & m \\ m & m & 1 & m & \cdots & m \\ m & m & m & 1 & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

5.10. Halla, si existe, la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

5.11. Halla el rango por determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5.12. Sean A y B dos matrices de orden $m \times n$. Prueba que el rango de la matriz suma $A+B$ no es mayor que la suma de los rangos de las matrices A y B. (*Indicación*: No es necesario usar determinantes. Tan sólo hay que recordar que el rango de una matriz coincide con la dimensión del subespacio vectorial que generan sus filas consideradas como vectores de $\mathbb{R}^n$).