Álgebra Lineal

Sistemas lineales: Rouché y Cramer

6.1. Resuelve por la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.2. Resuelve por Cramer:

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r} x - y + z = 4 \\ x - y - z = 2 \\ x - y \qquad = 3 \end{array}\right\} \qquad \text{b)}\ \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ x + 3y \qquad = 1 \end{array}\right\} \qquad \text{c)}\ \left.\begin{array}{r} x + y - z - w = 2 \\ x - y + z - w = 6 \\ x \qquad\qquad - w = 4 \\ 2x - y + z - 2w = 10 \\ 3x - 2y + 2z - 3w = 16 \end{array}\right\}$$

6.3. En el sistema siguiente, calcula el valor de m para que tenga alguna solución distinta de la trivial y resuélvelo para ese valor, por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} mx - 4y - 2z = 0 \\ 6x + 3y + 4z = 0 \\ -x + 3y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

6.4. Discute y resuelve, en los casos en que sea posible, por Cramer:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -2x + y + z = 3 \\ -5x + 5y + 2z = m \end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{r} mx - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = -3 \end{array}\right.$$

6.5. Discute por Rouché y resuelve, si es posible, en función de los parámetros a y b:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{r} y = x \\ x + y = 0 \\ ax + by = 0 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{r} -x + 2y + z = a \\ 2x + 3y - az = 4 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right.$$

6.6. Discute por Rouché y resuelve, si es posible, en función de los parámetros a, b y m:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{r} y + z = b \\ x + y + z = a - 1 \\ (a^2 - b^2)z = a + b \end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{r} x - my + z = 0 \\ x + my + z = 2 \\ mx + y + z = 2 \end{array}\right.$$

6.7. a) Encuentra un polinomio P de grado 3 tal que:

$$P(0) = 0, \quad P(1) = 3, \quad P(-1) = -1, \quad P(-2) = -6.$$

b) Sean $a_1, \dots, a_n$ números reales distintos. Sean $b_1, \dots, b_n$ números reales, no necesariamente distintos. Demuestra que existe una única función polinomial f de orden $n-1$ de modo que $f(a_i) = b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Usando lo anterior, piensa en una posible estrategia para aproximar una curva arbitraria mediante una función polinómica.

Indicación: Usa los determinantes de Vandermonde estudiados en el Tema 5.

6.8. Resuelve de nuevo el Ejercicio 4.18 del Tema 4, pero usando determinantes en lugar del método de Gauss para estudiar rangos de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Qué método te parece mejor?

6.9. Dados dos vectores $\vec{x} = (x_1, .., x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define el *producto escalar* de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \equiv \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

a) Para los siguientes pares de vectores, calcula su producto escalar:

i) $(7,5)$ y $(3,3/2)$ ii) $(1,7,2)$ y $(3,\pi,6/7)$ iii) $(1,0,0,1)$ y $(0,1,1,0)$.

b) Dado un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$, consideramos el punto x de $\mathbb{R}^3$ de las mismas coordenadas. ¿Por qué $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ es la distancia del punto x al origen? Dados dos puntos x e y, ¿por qué $\sqrt{\langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle}$ es la distancia que hay de x a y?

c) Dos vectores de $\mathbb{R}^n$ se llaman *ortogonales* si su producto escalar es cero. Encuentra dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$, otro par en $\mathbb{R}^3$ y otro en $\mathbb{R}^4$. Dibuja, cuando sea posible, los pares de vectores.

6.10. Dados dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, se llama *producto vectorial* de los vectores anteriores al vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Demuestra que el vector $\vec{x} \times \vec{y}$ es ortogonal a los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

6.11. Elimina los parámetros de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x_1 = a + 2b + c - 1 \\ x_2 = -2a - b + c + 2 \\ x_3 = 3a + b - 2c - 5 \\ x_4 = -2a + 4b + 6c + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda - 2\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2p + 4q \\ y = 2 - p - q \\ z = p + 2q \end{cases}$$

6.12. Demuestra que el sistema siguiente tiene solución única si $abc \neq 0$. Resuélvelo en ese caso.

$$\left.\begin{aligned} bx + ay &= c \\ cx + az &= b \\ cy + bz &= a \end{aligned}\right\}$$

6.13. Discute por Rouché en función de los parámetros m, a, b, c, d:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y + 2z + 4t &= 2 \\ x - 4y + z + 3t &= 5 \\ 5x + y - 4z - t &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} (m+2)x + y + z &= m-1 \\ mx + (m-1)y + z &= m-1 \\ (m+1)x + (m+1)z &= m-1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= d \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2 \end{aligned}\right\}$$

6.14. Discute por Rouché los siguientes sistemas según los valores de los parámetros a y b:

$$\left\{\begin{aligned} 3y - ax + 2z &= 2 \\ 2z + 5x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} ax + 2z &= 2 \\ 5x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} ax + by &= a \\ ay + bz &= b \\ az + bt &= a^2 \\ bx + at &= b^2 \end{aligned}\right.$$

6.15. Encuentra ecuaciones paramétricas para el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,0,1,-1)$, $(1,1,0,-1)$, $(1,1,1,1)$. A partir de dichas ecuaciones paramétricas, usa determinantes para calcular ecuaciones implícitas.

6.16. La aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tiene como matriz con respecto de las bases canónicas:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentra la preimagen del vector $(0,1,1,1)$, es decir, todos los vectores cuya imagen por f es dicho vector.

6.17. Calcula la preimagen de $(-2,0,2)$ por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sabiendo que $f(4,0,-2,0) = (-2,0,2)$ y que la matriz de f respecto de las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$