ÁLGEBRA LINEAL

MEDIDA DE ÁNGULOS.

El **producto escalar** nos ha permitido definir la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$, también la ortogonalidad.

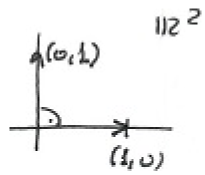

FIGURA 1. Ejes ortogonales.

Definición 1. *Dados dos vectores $v, u \in \mathbb{R}^n$ decimos que son ortogonales si*

$$< v, u >= 0.$$

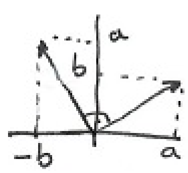

FIGURA 2. $v = (a, b)$ y $u = (-b, a)$ son vectores ortogonales.

ÁNGULOS

Los puntos de $\mathbb{R}^2$ que forman la circunferencia de centro cero y radio 1 son:

$$C = \{a \in \mathbb{R}^2 \ : < a, a >= 1\}.$$

Si $a = (x, y)$, entonces

$$x^2 + y^2 = 1.$$

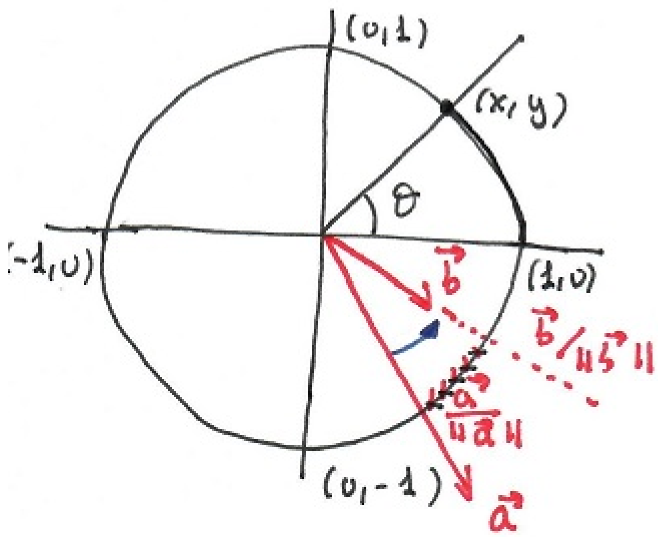

FIGURA 3. Ángulo entre los vectores a y b.

Definición 2. *Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{R}^2$, se llama* ***ángulo*** *entre ellos (medidos en radianes), $\angle a, b$, a la longitud del arco de C comprendido desde $\frac{a}{||a||}$ hasta $\frac{b}{||b||}$.*

Consultar la medida de curvas en los apuntes de Cálculo.

Observación 1. *Si L es la longitud de la circunferencia y D es el diámetro, sabemos que*

$$\frac{L}{D} = \pi.$$

Así la longitud de C es 2π.

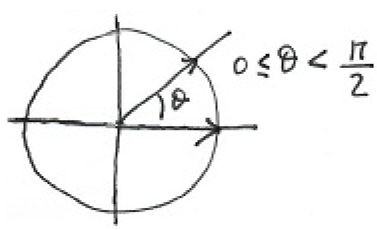

FIGURA 4. Medidas de ángulos.

Los ángulos están comprendidos entre 0 y 2π.

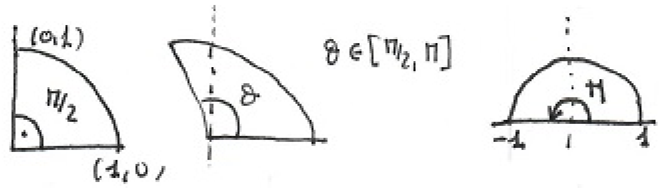

FIGURA 5. Medidas de ángulos.

FUNCIONES SENO Y COSENO.

Sea C la circunferencia unidad

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Hemos visto que a cada $(x,y) \in C$ le hacemos correponder un ángulo θ

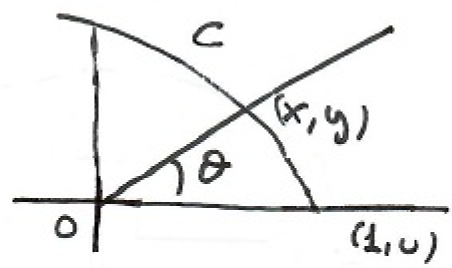

Figura 6. Ángulo desde $(1,0)$ a (x,y).

Ahora vamos a invertir el proceso. Acada ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ le vamos a asignar los valores x e y de modo que el punto $(x,y) \in C$ genera el ángulo θ.

Definición 3. ***A)*** *Se llama coseno a la función*

$$\begin{array}{cccc} \cos & : & [0,2\pi) & \to & [-1,1] \\ & & \theta & \to & \cos\theta \end{array}$$

B) *Se llama seno a la función*

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{sen} & : & [0,2\pi) & \to & [-1,1] \\ & & \theta & \to & \operatorname{sen}\theta \end{array}$$

para las cuáles

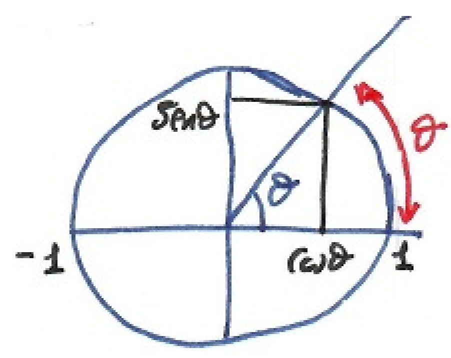

Figura 7. Definición del cos y el sen.

Estas funciones tienen las siguientes propiedades (repasar la Trigonometría o los apuntes de Cálculo).

Proposición 1.
- $\cos\theta, \operatorname{sen}\theta \in [-1,1]$.
- $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, *ya que* $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in C$.

- $\cos\theta = \cos -\theta$.
- $\operatorname{sen} -\theta = -\operatorname{sen}\theta$.

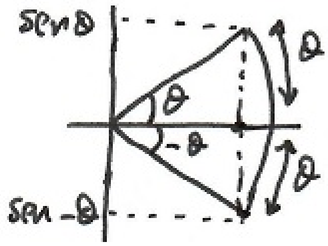

FIGURA 8. Definición cos y sen de ángulos negativos.

- $\cos(\theta+\lambda) = \cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha$.
- $\operatorname{sen}(\theta+\lambda) = \cos\theta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha$.

Observación 2. *Como* $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ *y* $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 2\pi = 0$*, estas funciones se pueden estender de forma periódica en todo* $\mathbb{R}$.

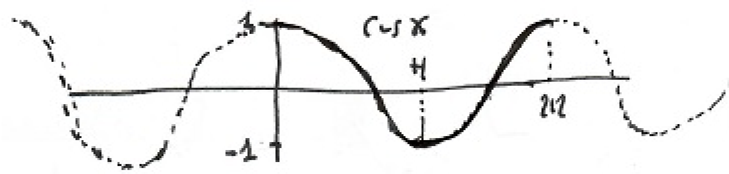

FIGURA 9. Función coseno.

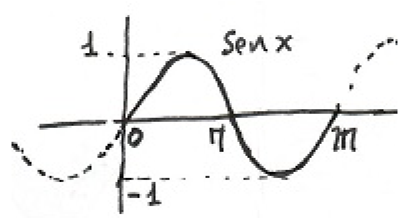

FIGURA 10. Función seno.

ALGUNAS APLICACIONES.

Con la noción de ángulo, podemos describir de otra manera el producto escalar.

Teorema 1. *Si* $a, b \in \mathbb{R}^n$*, entonces*

$$< a, b >= ||a||\,||b|| \cos(\angle a, b).$$

Demostración: Veamos primero la prueba en $\mathbb{R}^2$. Allí los vectores a y b forman los ángulos

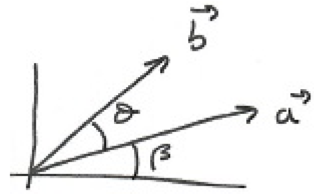

Figura 11. $\theta = \angle a, b$.

Por el Teorema de Tales

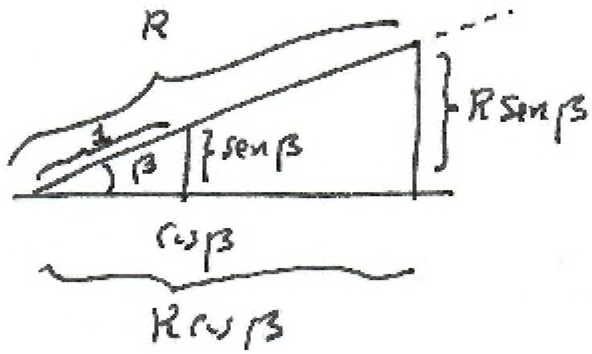

Figura 12. Teorema de Tales.

$$a = ||a||(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

y

$$b = ||b||(\cos(\beta+\theta), \operatorname{sen}(\beta+\theta)).$$

Así, por la definición de producto escalar,

$$< a, b >= ||a||||b||(\cos\beta\cos(\beta+\theta) + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\beta+\theta)) =$$

usandos las propiedades del seno y el coseno

$$||a||||b||\cos((\theta+\beta)-\beta) = ||a||||b||\cos\theta.$$

En el caso general, en $\mathbb{R}^n$, tomamos en el plano generado por a y b un vector ortogonal a a. Le llamamos u.

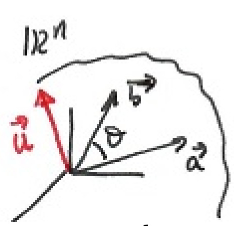

Figura 13. Vector ortogonal a a en el plano formado por a y b.

Ahora escribimos b de la forma

$$b = ||b||(\frac{a}{||a||}\cos\theta + \frac{u}{||u||}\operatorname{sen}\theta)$$

Esto se puede hacer ya que

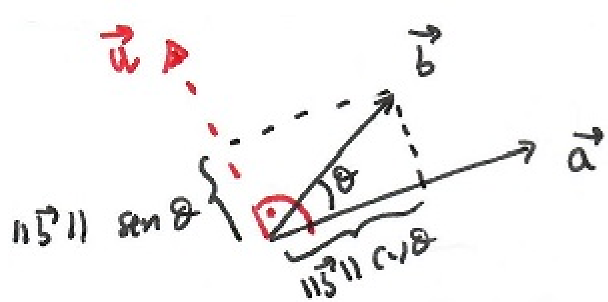

Figura 14. b proyectado sobre vectores ortogonales.

Ahora

$$< a, b >=< a, ||b||(\frac{a}{||a||}\cos\theta + \frac{u}{||u||}\operatorname{sen}\theta) >=$$
$$\frac{||b||}{||a||}\cos\beta < a, a >= \frac{||b||}{||a||}\cos\beta ||a||^2 \qquad \square$$

UNA OPERACIÓN EXCLUSIVA DE $\mathbb{R}^3$.

Definición 4. *Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ se define su* ***producto vectorial*** *por*

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) =$$

en lenguaje de determinantes

$$(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}) \in \mathbb{R}^3.$$

Los determinantes se verán más adelante. La fórmula de arriba sale de resolver un sistema como vemos en la siguiente Proposición. Este sistema se resuelve usando la regla de Cramer (ver la Hoja-6 de problemas).

Esta operación tiene las siguientes propiedades.

Proposición 2. *Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces*

a) $< x, x \times y >=< y, x \times y >= 0$. *El vector $x \times y$ es* ***ortogonal*** *a x e y.*
b) $||x \times y|| = ||x||\,||y|||\operatorname{sen}(\angle x, y)|$.
c) $x \times y = -y \times x$ *(operación no conmutativa)* .
d) $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$,
e) $\alpha(x \times y) = \alpha x \times y$.

Demostración: Las propiedades c),d) y e) salen directamente haciendo cuentas.

a) El producto vectorial solo tiene sentido en $\mathbb{R}^3$, ya que el vector que obtenemos es (una recta única) ortogonal a dos dados.

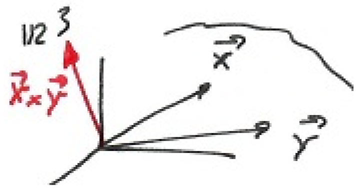

FIGURA 15. $x \times y$ ortogonal al plano formado por x e y.

Para ver esto, buscamos un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a los dados x e y. De esta busqueda sale la fórmula de la definición de producto vectorial.

FIGURA 16. Busqueda de un vector ortogonal al plano formado por x e y.

El vector buscado tiene que verificar que

$$\begin{array}{rcl} <(a,b,c),x>= & ax_1+bx_2+cx_3 & = & 0 \\ <(a,b,c),y>= & ay_1+by_2+cy_3 & = & 0, \end{array}$$

este es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnita: a, b y c. Más adelante veremos como se resuelve este sistema (ver Hoja-6 de problemas). Si

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces la regla de Cramer nos dice que una solución del sistema es

$$\frac{\begin{vmatrix} -x_3 & x_2 \\ -y_3 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -x_3 \\ y_1 & -y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{y} \qquad 1.$$

Este vector es ortogonal a x e y, luego también lo va a ser

$$(a,b,c) = (\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}) = x \times y$$

donde la última igualdad es una definición.

b) Para calcular un módulo, usando la definición,

$$||x \times y||^2 =< x \times y, x \times y >=$$

$$(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$$

haciendo cuentas y usando la fórmula del módulo de un producto escalar vista anteriormente

$$||x||^2||y||^2 - ||x||^2||y||^2 \cos^2(\angle x, y) = ||x||^2||y||^2(1 - \cos^2(\angle x, y)) =$$
$$||x||^2||y||^2 \operatorname{sen}^2(\angle x, y.)$$

Tomando raíces cuadradas

$$||x \times y|| = ||x|| \, ||y|| |\operatorname{sen}(\angle x, y)| \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`