ÁLGEBRA LINEAL.

Aproximación por Aplicaciones Lineales.

Veamos, con un ejemplo, como las aplicaciones lineales aproximan las funciones que aparecen en **Cálculo**.

1. Sea
$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \to & f(x,y,z). \end{array}$$
   Por ejemplo $g(x,y,z) = x^2y + z \operatorname{sen} y$.
2. Para (x_0, y_0, z_0), se tiene $f(x_0, y_0, z_0) = t_0$.
   Para $(x_0, y_0, z_0) = (1, \pi/2, 1)$ tenemos $g((1, \pi/2, 1)) = \pi/2 + 1$
3. Supongamos que fijamos dos variables de las tres de f y que sobre la tercera f es derivable:
   - $h(x) = f(x,y,z)$, entonces $h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$.
   - $k(y) = f(x,y,z)$, entonces $k'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$.
   - $p(z) = f(x,y,z)$, entonces $p'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

   En nuestro ejemplo
   - $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2xy$.
   - $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = x^2 + z\cos y$.
   - $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \operatorname{sen} y$.
4. Se considera el vector
$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0))$$
   llamado vector **gradiente** de f en el punto (x_0, y_0, z_0).
   En nuestro ejemplo
$$\nabla g(1, \pi/2, 1) = (2\pi/2, 1 + \cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)) = (\pi, 1, 1).$$
5. Se llama **diferencial** de f a la aplicación
$$\begin{array}{ccccccc} Df_{|_{(x_0,y_0,z_0)}} & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} & & \\ & & (x,y,z) & \to & Df_{|_{(x_0,y_0,z_0)}}(x,y,z) & = & < \nabla f(x_0,y_0,z_0), (x,y,z) > \end{array}$$

Esto es una aplicación lineal.

En nuestro ejemplo

$$Dg_{|_{(1,\pi/2,1)}}(x,y,z) = \pi x + y + z.$$

6. Se puede probar que si $(x,y,z) \sim (x_0,y_0,z_0)$ (próximos), entonces

$$f(x,y,z) \sim < \nabla f(x_0,y_0,z_0),(x-x_0,y-y_0,z-z_0) > + f(x_0,y_0,z_0).$$

En nuestro ejemplo

$$x^2y + z \operatorname{sen} y \sim \pi(x-1) + (y-\pi/2) + (z-1) + \pi/2 + 1$$

si $(x,y,z) \sim (1,\pi/2,1)$.

Observemos que la aplicación

$$\begin{array}{cccccl} T & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} & \\ & & (x,y.z) & \to & T(x,y,z) & = < \nabla f(x_0,y_0,z_0),(x-x_0,y-y_0,z-z_0) > + f(x_0,y_0,z_0) \end{array}$$

es una aplicación lineal más una constante $(f(x_0,y_0,z_0))$. Además vemos que

$$T(x_0,y_0,z_0) = f(x_0,y_0,z_0).$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`