ÁLGEBRA LINEAL.

Propiedades de las Aplicaciones Lineales.

Vamos a tratar con **aplicaciones lineales**, que como sabemos, son aquellas aplicaciones entre espacios vectoriales que se definen de la siguiente manera.

Definición 1. *Sean V y W dos espacios vectoriales. Una aplicación*

$$f : V \to W$$

se dice que es una ***Aplicación Lineal*** *si para todo $v, u \in V$ y para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$f(\lambda v + \beta u) = \lambda f(v) + \beta f(u).$$

Las aplicaciones lineales verifican algunas propiedades interesantes.

Proposición 1. *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales entonces*

a)
$$f(v + u) = f(v) + f(v),$$
para todo $u, v \in V$

b) $f(0) = 0$

c)
$$f(\lambda v) = \lambda f(v),$$
para todo $v \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

d) *Si $v_1, ..., v_r \in V$ son r vectores linealmente dependientes, entonces*
$$f(v_1), ..., f(v_r) \in W$$
son r vectores linealmente dependiente en W.

Las aplicaciones lineales mantienen la ***dependencia*** *lineal.*

e) *Si*

$$u_1 = f(v_1), ..., u_r = f(v_r) \in W$$

*son r vectores **linealmente independientes** en W, entonces los vectores $v_1, ..., v_r$ son r vectores **linealmente independientes** en V.*

*El apartado anterior nos dice que el **recíproco** no es cierto.*

Demostración: a) y c) se deducen directamente de la definición de aplicación lineal para $\lambda = \beta = 1$, en el primer caso y para $u = 0$ en el segundo.

b)

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0),$$

y sumando a ambos lados de igualdad $-f(0)$ tenemos

$$f(0) - f(0) = 0 = f(0).$$

d) Como $v_1, ..., v_r \in V$ son r vectores linealmente dependientes, entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_r \mathbb{R}$ no todos nulos de modo que

$$0 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_r v_r.$$

Aplicando f y el apartado b)

$$0 = f(0) = f(\sum_{k=1}^{r} \lambda_r v_r) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_r f(v_r).$$

Lo que prueba que los vectores $f(v_1), ..., f(v_r) \in W$ son r vectores linealmente dependiente en W.

e) Es una simple aplicación del apartado anterior. Si

$$u_1 = f(v_1), ..., u_r = f(v_r) \in W$$

son r vectores **linealmente independientes** en W, entonces $v_1, .., v_r \in V$ no pueden ser linealmente dependientes $\square$

Ejemplo 1. *Sea*

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} & \\ & & (x, y, x) & \to & f(x, y, z) & = & x \end{array}$$

una aplicación lineal. Los vectores $e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes. Sin embargo sus imágenes por f

$$f(e_2) = f(e_3) = 0$$

son dependientes.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es