

ÁLGEBRA LINEAL.

Forma Matricial de una Aplicación Lineal.

Toda aplicación lineal queda determinada por la imágenes de una base del espacio origen de la aplicación. Esta propiedad permite dar una representación matricial, en coordenadas, de la aplicación lineal.

Proposición 1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . La aplicación f queda totalmente determinada por las imágenes por f de los elemento de la base $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$. Así se tiene que

$$\text{Im}f = L[f(v_1), \dots, f(v_n)]$$

Demostración: Sea $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \in V$ cualquier elemento de V . Entonces por ser f lineal

$$f(v) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(v_k).$$

Así queda claro que $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im}f$ y que $f(v)$ queda totalmente determinado conociendo los valores de f sobre los elemento de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ \square

Forma matricial de f .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Sean $\{v_1, \dots, v_m\}$ y $\{u_1, \dots, u_n\}$ bases de V y W repectivamente. Si

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

consideramos la matriz

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & & a_{2,j} & & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix},$$

donde la columna j -ésima son las coordenadas de $f(v_j)$ respecto de la base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de W . Entonces se verifica que para todo vector

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \in V$$

su imagen por f es

$$f(v) = A_f \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

es decir $f(v) = \sum_{i=1}^n \eta_i u_i \in W$.

Demostración: Esto es así ya que

$$f(v) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f(v_j) =$$

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i \right) =$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_j a_{i,j} u_i \right) =$$

usando la propiedad conmutativa

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j a_{i,j} \right) u_i = \sum_{i=1}^n \eta_i u_i.$$

Luego $\eta_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{i,j}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Esto es lo mismo que escribir

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & & a_{2,j} & & a_{2,m} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \quad \square$$

Observación 1. si consideramos un sistema lineal:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde A es la matriz $n \times m$ de coeficientes del sistema. Si consideramos la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_m) \rightarrow f(x_1, \dots, x_m) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

la matriz A_f de la aplicación f referida a las bases canónicas de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n es precisamente la matriz A .

Con estas consideraciones, podemos determinar las soluciones del sistema (*), S' como las preimágenes del vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ por la aplicación f , es decir

$$S' = f^{-1} \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right).$$

Notación: Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal, donde $\{v_1, \dots, v_m\}$ y $\{u_1, \dots, u_n\}$ son bases de V y W respectivamente y donde

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & & a_{2,j} & & a_{2,m} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a f respecto de las bases anteriores, llamamos **ecuaciones de la aplicación lineal f** a:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m \\ \eta_2 &= a_{2,1}x_1 + \quad + a_{2,m}x_m \\ &\vdots \\ \eta_n &= a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m. \end{aligned}$$

Lo anterior nos va a permitir dar una importante aplicación al estudio de los sistemas lineales.

Teorema 1. (de Rouché-Fröbenius) Consideramos el sistema

$$(*) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = b$$

con A una matriz $n \times m$. Supongamos que el rango de la matriz A es igual al de la matriz ampliada $(A|b)$, es decir que el sistema es compatible. Consideramos S' el conjunto de soluciones del sistema

$$S' = \{y + x : x \in S\}$$

donde y es una solución de $(*)$ y S es el subespacio vectorial de las soluciones del sistema lineal homogéneo asociado $Ax = 0$. Entonces

$$\dim S = m - \text{rang} A.$$

Demostración: Solo hay que ver que

$$\dim S = m - \text{rang} A,$$

lo demás ha sido probado anteriormente. Consideramos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\rightarrow f(x_1, \dots, x_m) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Claramente

$$S = \text{Ker} f.$$

Por la proposición anterior

$$\dim \text{Im} f = \text{rang} A,$$

ya que las columnas de la matriz A son las coordenadas de $f(e_j)$ en la base canónica de \mathbb{R}^n . Usando la fórmula de la dimensión

$$m = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f,$$

despejamos y

$$\dim S = m - \text{rang} A \quad \square$$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es