

ÁLGEBRA LINEAL.

Cambios de Bases en Endomorfismos.

Sea V un espacio vectorial con una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Sea $f : V \rightarrow V$ un **endomorfismo**, es decir una aplicación lineal de V en sí mismo. Consideramos la forma matricial de f respecto de la base B , para $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$

$$f(v) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & a_{2,j} & & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \eta = A_{B,f} \lambda.$$

A veces es mejor trabajar con otra base $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$ distinta de la primera. Por ejemplo, para conseguir que la matriz asociada $A_{B',f}$ sea más sencilla (cuando estudiemos diagonalización de endomorfismos veremos situaciones de este tipo).

Consideramos la matriz D de cambio de base, que transforma coordenadas de la base B' en coordenadas en la base B . Así

$$\lambda = D \lambda' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

Ahora nuestra nuestra aplicación f referida a la base B

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = A_{B,f} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

se transforma usando el cambio de coordenadas en

$$D \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \vdots \\ \eta'_n \end{pmatrix} = A_{B,f} D \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}.$$

Como un cambio de coordenadas tiene una matriz D invertible, llegamos a que

$$\begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \vdots \\ \eta'_n \end{pmatrix} = D^{-1} A_{B,f} D \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}.$$

Así la matriz de f referida a la base B' es

$$A_{B',f} = D^{-1} A_{B,f} D.$$

Ejemplo 1. Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de modo que respecto a las bases $B_1 = \{u_1, u_2\}$ de \mathbb{R}^2 y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de \mathbb{R}^4 tiene por expresión matricial

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Se eligen nuevas bases $B_3 = \{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 y $B_4 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ de \mathbb{R}^4 , de modo que

$$\begin{cases} e_1 = u_1 - 2u_2 \\ e_2 = u_1 + u_2 \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = v_1 - 2v_2 - v_3 - v_4 \\ w_2 = - v_2 - v_3 \\ w_3 = v_1 - v_3 \\ w_4 = v_1 \end{cases}.$$

Vamos a expresar la aplicación f respecto distintas bases.

Demostración: Observemos que tenemos los cambios de bases:

- De B_3 en B_1

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = D\lambda'$$

las coordenadas de los vectores e_1 y e_2 respecto de la base B_1 son las columnas de la matriz D .

- De B_4 en B_2

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \eta'_3 \\ \eta'_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \eta = E\eta'$$

las coordenadas de los vectores w_1, w_2, w_3 y w_4 respecto de la base B_2 son las columnas de la matriz E .

a) Respecto de las base B_1 y B_4 la aplicación f se escribe como

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \eta'_3 \\ \eta'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A_{B_1, B_4, f} = D^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Usamos el método de Gauss-Jordan para encontrar la matriz D^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Luego

$$A_{B_1, B_4, f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ -1 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Respecto de las base B_3 y B_2 la aplicación f se escribe como

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A_{B_3, B_2, f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \\ -1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Respecto de las base B_3 y B_4 la aplicación f se escribe como

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \eta'_3 \\ \eta'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A_{B_3, B_4, f} = D^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \\ -1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 15 & -3 \\ -9 & 3 \\ 15 & -3 \end{pmatrix} \quad \square$$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`