ÁLGEBRA LINEAL.

Ejemplos de Aplicaciones Lineales.

Ya que conocemos la relación entre aplicaciones lineales y matrices, vamos a mostrar alguna aplicaciones lineales donde aparecen matrices con alguna característica especial.

Ejemplo 1. *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

Esta ***matriz es ortogonal****, es decir* $A^T = A^{-1}$*.*

Demostración: Consideramos la aplicación

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \\ & & (x,y) & \to & f(x,y) & = & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{array}$$

Entonces

$$f(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) = (x+yi)e^{i\theta},$$

donde el último producto es un producto de complejos.

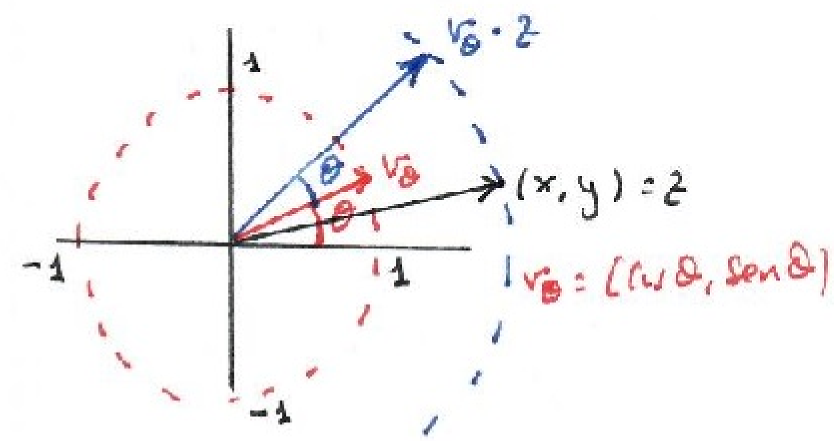

FIGURA 1. Giro de ángulo θ.

Nuestra aplicación lineal es un movimiento del plano: un giro de ángulo θ. Este tipo de movimientos vienes asociados a matrices ortogonales $\square$

Ejemplo 2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que admite derivadas parcial hasta de segundo orden continuas.*

Demostración: Consideramos $\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x})$. Se llama Hessiano de f a

$$Hf(x, y) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Esta **matriz es simétrica**, por el Teorema de las Derivadas Cruzadas. Las propiedades de Hf nos dan información sobre los máximos y mínimos de la función f de dos variables $\square$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`