

ÁLGEBRA LINEAL.

Rango de una Matriz por Determinantes.

Vamos a ver la relación del rango (máximo) de una matriz cuadrada y su determinante.

Proposición 1. Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada de orden n . Los vectores filas (o columnas) de A son linealmente independientes (es decir $\text{Rang}A = n$) si y solo si $|A| \neq 0$

Demostración: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, aplicando el método de Gauss de eliminación, podemos triangularizar la matriz y pasar a

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & & \cdots & & b_{1,n} \\ & \ddots & & & \\ 0 & & b_{i,i} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

El método de Gauss no altera el rango de una matriz. Respecto del determinante $|A| = \pm|B| = \pm \prod_{i=1}^n b_{i,i}$ (el cambio de signo solo se puede producir si intercambiamos filas). Ahora

- Si $\text{Rang}A = n$, entonces $b_{i,i} \neq 0$ para todo i , así $|B| \neq 0$ y se tiene que $|A| \neq 0$.
- Si $|A| \neq 0$, entonces el rango de A no puede ser menor que n si lo fuese, los vectores filas (o columnas) de la matriz serían dependientes y como vimos en la lección anterior eso conlleva que $|A| = 0$, lo cual no es posible por hipótesis $\square$

Rango de una Matriz Orlando Menores.

Dada una matriz $A \in M_{n \times m}$ de orden $n \times m$ ¿cómo calcular su rango? Podemos usar Gauss-Jordan y calcular una matriz escalonada equivalente (es decir del mismo rango). También podemos usar determinantes.

Proposición 2. Sea $A \in M_{n \times m}$ y sea un **menor cuadrado** $D \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_r \\ q_1 & \cdots & q_r \end{pmatrix}$, con

$$\left| D \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_r \\ q_1 & \cdots & q_r \end{pmatrix} \right| \neq 0,$$

entonces las $p_1, p_2, \dots, p_r$ filas (respectivamente las $q_1, \dots, q_r$ columnas) son linealmente independientes. Así

$$\text{Rang} A \geq r.$$

Demostración: Solo hay que usar la Proposición anterior y el Teorema del Rango (que dice que el rango por filas y por columnas de una matriz es el mismo) $\square$

Observación 1. Si $\left| D \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_r \\ q_1 & \cdots & q_r \end{pmatrix} \right| \neq 0$, para ver que si $\text{Rang} A > r$ calculamos determinante de menores de orden mayor que r y que contengan a $D \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_r \\ q_1 & \cdots & q_r \end{pmatrix}$. Es lo que se llama **Orlar** al menor $D \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_r \\ q_1 & \cdots & q_r \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1. Queremos conocer el rango de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Demostración: El menor

$$D \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0.$$

Eso nos dice que los vectores $(-2, 4, 0, 2, -2, 0, 2)$ y $(-1, -1, 0, 1, 0, 1, -2)$ son linealmente independientes y así

$$2 \leq \text{Rang} A \leq 4.$$

La matriz A tiene cuatro filas, luego por el Teorema de Rango, su rango no puede ser mayor que 4.

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ con menores de orden 3. Antes observamos que la tercera columna es nula, la cuarta es la primera cambiada de signo y la quinta es $C_5 = 1/3C_1 - 1/3C_2$. Así tenemos que mirar los menores:

■

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

■

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -11 \end{vmatrix} = 0,$$

ya que la séptima columna es la suma de las dos primeras.

■

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 186 = 0.$$

■

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \right| = 0,$$

ya que la séptima columna es la suma de las dos primeras.

Como todos los menores de orden 3 que orlan $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ son nulos, no hay tres filas o columnas independientes (si las hubiese algún menor tendría que ser no nulo), entonces

$$\text{Rang} A = 2 \quad \square$$

Otra forma de verlo es el método de eliminación de Gauss: si a A le hacemos $F_3 - F_1$; $F_4 - 2F_1$; $F_1 - 2F_2$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -3 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

intercambiando filas y dividiendo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -3 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

y haciendo $F_3 + F_2; F_4 - 3F_2$, llegamos a que

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deducimos de nuevo que $\text{Rang}A = 2$, por las dos filas no nulas después de escalar la matriz.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar.Ruiz@mat.ucm.es