ÁLGEBRA LINEAL.

Matriz Inversa con Determinantes.

Teorema 1. *Sea $A \in M_n$ es una matriz cuadrada. A es invertible si y solo si $A \neq 0$.*

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que A es invertible y por tanto existe A^{-1}. Como

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|,$$

usando la regla del determinate de un producto. Por tanto ni $|A|$ ni $|A|^{-1}$ pueden ser cero. Además

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

$\Leftarrow$) En esta parte vemos la fórmula de la matriz inversa usando determinantes.

Sea $A = (a_{i,j})$, si $|A| \neq 0$, consideramos la matriz de adjuntos

$$B = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,n} & & A_{2,n} \\ \vdots & & \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix},$$

donde

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & & & & & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & & & & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Vamos a ver que

$$\boxed{A^{-1} = \tfrac{1}{|A|} B^T}.$$

Claro,

$$A(\frac{1}{|A|}B^T) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1}/|A| & \cdots & A_{k,1}/|A| & \cdots & A_{n,1}/|A| \\ \cdots & & & & \\ A_{1,n}/|A| & \cdots & A_{k,n}/|A| & \cdots & A_{1,1}/|A| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A|/|A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ & & \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & |A|/|A| \end{pmatrix} = I,$$

ya que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{A_{k,j}}{|A|} =$$

recordando el desarrollo de un determinante por una fila,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\frac{A_{k,j}}{|A|} = \frac{|A|}{|A|} & \text{si} \quad k = i \\ \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} & \\ \vdots & & & \\ a_{i,1} & & a_{i,n} & \text{Fila } i \\ \vdots & & & \\ a_{i,1} & & a_{i,n} & \text{Fila } k \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & \end{vmatrix} = 0 & \text{si} \quad k \neq i \end{cases}$$

□

Observación 1. *El Teorema anterior nos da un método para calcular matrices inversa, la transpuesta de la matriz de adjunto multiplicada por el inverso del determinante de la matriz:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,n} & & A_{2,n} \\ \vdots & & \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}^T .$$

Ejemplo 1. *Vamos a calcular la inversa de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demostración: Primero calculamos su determinate

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 1 = -1 \neq 0,$$

como no es nulo existe la matriz inversa. Ahora calculamos la matriz de adjuntos:

$$B =$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 & A_{1,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{2,1} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 & A_{2,2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 & A_{2,3} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{3,2} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 & A_{3,3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \end{pmatrix}.$$

La inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} B^T =$$

$$-\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

También se puede hacer este cálculo por Gauss-Jornan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{Cambiandofilas} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

haciendo $F_3 - 3F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

cambiando de signo la tercera fila

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim_{F_1 - F_3; F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Llegamos al mismo resultado de antes.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es