

# ÁLGEBRA LINEAL.

## El Grupo de Permutaciones.

Vamos a considerar las aplicaciones biyectivas de un conjunto de  $n$  elementos en si mismo. En concreto:

**Definición 1.** Consideramos el conjunto de aplicaciones

$$S_n = \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} : f \text{ biyectiva}\}.$$

Al conjunto  $S_n$  se le llama conjunto de las **Permutaciones** de  $n$  elementos.

**Ejemplo 1.**

$$f_{i,j} : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

$$k \quad \rightarrow \quad f(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \neq i \text{ o } j \\ j & \text{si } k = i \\ i & \text{si } k = j \end{cases}$$

$f_{i,j} \in S_n$ .

**Demostración:** Gráficamente

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \searrow & & \swarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \end{array}$$

Esta aplicación es claramente biyectiva □

Sobre  $S_n$  podemos definir una operación, la **composición** de aplicaciones:

$$\circ : S_n \times S_n \rightarrow S_n$$

$$(g, f) \rightarrow g \circ f$$

**Ejemplo 2.** Si componemos la permutación  $f_{i,j}$  con  $f_{j,i}$ , entonces

$$f_{j,i} \circ f_{i,j}(k) = k \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Así  $f_{i,j} \circ f_{j,i} = I$ , donde  $I$  es la aplicación **Identidad**.

Con esta operación el conjunto de permutaciones tiene estructura de **Grupo**.

**Proposición 1.**  $(S_n, \circ)$  el conjunto de las **permutaciones** con la operación de **composición** de aplicaciones tienen estructura de **Grupo**. Es decir, la **composición** es **asociativa**, existe un **elemento neutro** y cada  $f \in S_n$  tiene un **elemento inverso**.

**Demostración:** La composición de aplicaciones biyectivas

$$\begin{aligned} \circ & : S_n \times S_n \rightarrow S_n \\ (g, f) & \rightarrow g \circ f \end{aligned}$$

es de nuevo una aplicación biyectiva. Luego la composición está bien definida sobre  $S_n$ .

Veamos además que:

- **Asociativa:** si  $f, g, h \in S_n$  y  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h(k) &= (f \circ g)(h(k)) = f(g(h(k))) = \\ &= f(g \circ h(k)) = f \circ (g \circ h)(k). \end{aligned}$$

- **La identidad  $I$  es el Elemento Neutro:** ya que si  $f \in S_n$  y  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces

$$I \circ f(k) = I(f(k)) = f(k) = f(I(k)) = f \circ I(k).$$

- **Elemento Inverso:** de  $f \in S_n$ . Como  $f$  es biyectiva, existe su inversa

$$f^{-1} : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

la cual tiene la propiedad de que

$$f^{-1} \circ f(k) = f \circ f^{-1}(k) = k = I(k) \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \square$$

**Observación 1.**  $(S_n, \circ)$  **no** tiene la propiedad **conmutativa**. En eso se parece al producto de matrices cuadradas que tampoco tiene esta propiedad.

**Ejemplo 3.** Sean  $f_{1,n}, f_{2,n} \in S_n$ .

**Demostración:** Se tiene que

$$f_{1,n} \circ f_{2,n}(1) = f_{1,n}(f_{2,n}(1)) = f_{1,n}(1) = n.$$

Por otro lado

$$f_{2,n} \circ f_{1,n}(1) = f_{2,n}(f_{1,n}(1)) = f_{2,n}(n) = 2.$$

Luego  $f_{1,n} \circ f_{2,n} \neq f_{2,n} \circ f_{1,n}$   $\square$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FA-  
CULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN  
*E-mail address:* Cesar\_Ruiz@mat.ucm.es