ÁLGEBRA LINEAL.

Inversiones.

El siguiente concepto aparece en la definición de **Determinante**.

Definición 1. *Dada $f \in S_n$ una permutación, se dice que f tiene una* ***inversión*** *si para*

$$i, j \in \{i, 2, ..., n\} \qquad con \qquad i < j$$

se tiene que

$$f(j) < f(i).$$

El número total de inversiones de f se denota por $[f]$.

Notación: si f es la permutación

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{array}$$

escribimos el número de sus inversiones como

$$[f] = [f(1), f(2), ..., f(n)].$$

¿Cómo calculamos el número de inversiones de una permutación? Veamos un ejemplo donde se muestra como hacer el cálculo.

Ejemplo 1. *Considermos la permutación $f \in S_7$:*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{array}.$$

Demostración: Para calcular

$$[f] = [f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)] =$$

$$[2, 5, 1, 4, 7, 3, 6],$$

nos fijamos en el 1 y en los número que aparecen antes que él (por la izquierda)

$$[2, 5, \leftarrow 1, 4, 7, 3, 6].$$

Aquí contamos dos inversiones : $f(3) = 1 < f(1) = 2$ y $f(3) = 1 < f(2) = 5$.

Quitamos el uno y hacemos lo mismo con el dos:

$$[\leftarrow 2, 5, 4, 7, 3, 6].$$

Aquí no vemos ninguna inversión de f ($f(1) = 2$ y la inversión $f(3) = 1 < f(1) = 2$ ya la hemos contado antes).

Quitamos el dos y hacemos lo mismo con el 3:

$$[5, 4, 7, \leftarrow 3, 6].$$

Aquí detectamos tres inversión de f ($f(6) = 3 < f(2) = 5, f(4) = 4, f(5) = 7$).

Seguimos el proceso hasta 6 veces y vemos que

$$[2, 5, 1, 4, 7, 3, 6] = 2 + 0 + 3 + 1 + 0 + 1 = 7.$$

Esta permutación tiene 7 inversiones $\square$

Definición 2. *Sea $f \in S_n$ una permutación.*

a) *Si f presenta un número par de inversiones se le llama **par**.*
b) *Si f presenta un número impar de inversiones se le llama **impar**.*

Teorema 1. *Una **transposición altera la paridad de una permutación** (es decir si $f \in S_n$ y se considera $f_{i,j}$, entonces $f \circ f_{i,j}$ es par si f es impar o es impar si f es par).*

En particular, la identidad $f = I$ que es par (por no tener ninguna inversión) se convierte en impar al multiplicarla con cualquier transposición $f_{i,j}$. Así

$$I \circ f_{i,j} = f_{i,j},$$

***toda transposición es impar**.*

Demostración: En primer lugar consideramos el caso $f_{i,j} = f_{i,i+1}$ con $i < n$. Así

$$[f] = [f(1), ..., f(i), f(i+1), ..., f(n)]$$

y
$$[f \circ f_{i,i+1}] = [f(1), ..., f(i+1), f(i), ...f(n)].$$
Ahora si $f(k) \neq f(i), f(i+1)$, entonces o bien
$$[f(1), ..., \leftarrow f(k), ..., f(i+1), f(i), ...f(n)],$$
o bien
$$[f(1), ..., f(i+1), f(i), ..., \leftarrow f(k), ..., f(n)].$$
El número de inversiones relacionados con $f(k)$ respecto de f o de $(f \circ f_{i,i+1})$ son las mismas. Ahora

- si $f(i) > f(i+1)$, se tiene que $f \circ f_{i,i+1}$ tiene una inversión menos que f;
- si $f(i) < f(i+1)$, se tiene que $f \circ f_{i,i+1}$ tiene una inversión más que f.

Luego $[f \circ f_{i,1+1}] = [f] \pm 1$. Por tanto la paridad cambia.

Si consideramos una transposición cualquiera $f_{i,j}$ con $i < j$, sabemos de la lección anterior, que $f_{i,j}$ se puede poner como una composición de un número impar de transposiciones consecutivas:
$$f_{i,j} = f_{i+1,i} \circ f_{i+2,i+1} \circ .... \circ f_{j-1,j-2} \circ f_{j-1,j} \circ ...... \circ f_{i+1,i+2} \circ f_{i,i+1} = h \circ g,$$
$2(j-i)-1$ transposiciones. Luego como
$$f \circ f_{i,j} = f \circ f_{i+1,i} \circ f_{i+2,i+1} \circ .... \circ f_{j-1,j-2} \circ f_{j-1,j} \circ ...... \circ f_{i+1,i+2} \circ f_{i,i+1},$$
por lo de arriba, producimos en f $2(j-i)-1$-cambios de paridad (un número impar de cambios). Luego la paridad queda cambiada $\square$

Corolario 1. *En S_n el grupo de permutaciones de n elementos, el número de las permutaciones pares e impares coinciden.*

Demostración: El cardinal de S_n es $n!$ como sabemos. Sean:

- p el número de permutaciones pares.
- q el número de permutaciones impares.

Consideramos la transposición $f_{i,j}$ con $i < j$. Se considera la aplicación
$$\begin{array}{ccccc} T & : & S_n & \rightarrow & S_n \\ & & f & \rightarrow & T(f) = f \circ f_{i,j}. \end{array}$$
Ésta es una aplicación del conjunto S_n en si mismo, bien definida ya que $f \circ f_{i,j} \in S_n$. Veamos que T es **biyectiva**. Para ello tenemos que ver que

es inyectiva: Claro, si

$$f \circ f_{i,j} = g \circ f_{i,j} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ f_{i,j} \circ f_{i,j} = g \circ f_{i,j} \circ f_{i,j} \Leftrightarrow f = g,$$

ya que $f_{i,j} \circ f_{i,j} = I$.

es suprayectiva: Ahora si $g \in S_n$, tomamos $f = g \circ f_{i,j} \in S_n$ y se tiene que

$$T(f) = f \circ f_{i,j} = g \circ f_{i,j} \circ f_{i,j} = g.$$

Por el Teorema anterior sabemos que al componer con una transposición cambia la paridad, así

$$q \geq p$$

ya que todas las permutaciones pares distintas se pueden convertir (por T) en otras impares todas distintas. Y por el mismo argumento, pero al revés

$$p \geq q.$$

De lo cuál se sigue que

$$p = q \qquad \square$$

Además sabemos que

$$p = q = \frac{n!}{2}.$$

Corolario 2. *Si $g \in S_n$, entonces la paridad de g y g^{-1} coinciden.*

Demostración: Sean $i < j$. Supongamos que g tiene una inversión en i y j, es decir que

$$g(j) < g(i).$$

Entonces

$$g^{-1}(g(j)) = j > g^{-1}(g(i)) = i.$$

Para cada inversión en g aparece otra en g^{-1}, así

$$[g] \leq [g^{-1}].$$

Razonando de forma análoga empezando con g^{-1} llegamos a que

$$[g^{-1}] \leq [g].$$

Por tanto

$$[g] = [g^{-1}],$$

y así las paridades coinciden $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`