

ÁLGEBRA LINEAL.

Determinantes. Definición.

Consideramos el sistema:

$$\begin{array}{rcl} a_1x & + & b_1y = c_1 \\ a_2x & + & b_2y = c_2 \end{array} .$$

Si existe λ de modo que

$$\lambda(a_1, b_1) = (a_2, b_2),$$

entonces el sistema no tiene solución única; incluso puede ser incompatible si $c_2 \neq \lambda c_1$. En esta situación la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ no tiene rango 2. Tenemos que si $a_1 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$

$$\begin{array}{rcl} \lambda a_1 & = & a_2 \\ \lambda b_1 & = & b_2 \end{array} \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Razonando al contrario. Si notamos

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |A|$$

y este número no es **nulo**, entonces el sistema tiene solución única. Además el rango de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

es dos, es máximo.

¿Cómo podemos establecer una relación entre el rango de una matriz cuadrada A y una fórmula algebraica $|A|$ que relaciona sus entradas?
¿Cómo relacionar que A tenga rango máximo y que $|A| \neq 0$?

La respuesta a estas preguntas la da el concepto de **Determinante**.

Definición 1. Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n$ una matriz cuadrada de orden n . Llamamos **determinante** de A al número $|A|$ que definimos por

$$|A| = \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{f(1),1} a_{f(2),2} \dots a_{f(n),n}$$

Observación 1. Para calcular el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

sumamos los productos de n factores tomados de las n columnas de la matriz sin que coincidan las filas y multiplicado por ± 1 según la fórmula de arriba.

Observación 2. En $|A|$ el números de sumandos con un "+" delante o con un "-" coinciden ya que las permutaciones pares son tantas como las impares.

Ejemplo 1. Sea $S_2 = \{I, f_{1,2}\}$ el conjunto de permutaciones de dos elementos (que tiene $2! = 2$ elementos).

Demostración: I es par y $f_{1,2}$, como es una transposición, es impar. Así

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{I(1),1}a_{I(2),2} - a_{f_{1,2}(1),1}a_{f_{1,2}(2),2} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

Que es la fórmula que ya conocemos $\square$

Ejemplo 2. Sea $S_3 = \{I, f_{1,2}, f_{2,3}, f_{1,3}, g = \{2, 3, 1\}, h = \{3, 1, 2\}\}$ el conjunto de permutaciones de tres elementos (que tiene $3! = 6$ elementos).

Demostración: En este caso, calculamos las inversiones de las permutaciones

- $[I] = 0$.
- $[f_{1,2}] = 1$.
- $[f_{2,3}] = 1$.
- $[f_{1,3}] = [3, 2, 1] = 2 + 1 = 3$.
- $[g] = [2, 3, 1] = 2 + 0 + 0 = 2$.
- $[h] = [3, 1, 2] = 1 + 1 + 0 = 2$.

ahora

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{g(1),1}a_{g(2),2}a_{g(3),3} + a_{h(1),1}a_{h(2),2}a_{h(3),3} -$$

$$\begin{aligned}
& -a_{f_{1,2}(1),1}a_{f_{1,2}(2),2}a_{f_{1,2}(3),3} - a_{f_{2,3}(1),1}a_{f_{2,3}(2),2}a_{f_{2,3}(3),3} - a_{f_{1,3}(1),1}a_{f_{1,3}(2),2}a_{f_{1,3}(3),3} = \\
& a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - \\
& -a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.
\end{aligned}$$

La regla gráfica para calcular este tipo de determinantes es

- Sumandos positivos:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

- Sumandos negativos:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \square$$

Si consideramos S_4 , que es un conjunto con $4! = 24$ elementos, o S_5 , que es un conjunto con $5! = 120$ elementos, el cálculo de determinantes de orden mayor 3 parece que necesita otros medios distintos de la definición. Vamos a estudiar las propiedades del determinante. Éstas se deducen de su definición, pero luego se hacen independientes y permiten calcular determinantes por métodos más sencillos.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar.Ruiz@mat.ucm.es