ÁLGEBRA LINEAL.

Aplicaciones de los Determinantes.

Como dijimos en la introducción, los determinantes se usan para dos cosas, esencialmente:

1) para determinar si una colección de vectores son linealmente independientes. O equivalentemente, calcular el rango de estos vectores (o él de la matriz que forman sus coordenadas).
2) Para determinar si una matriz cuadrada tiene inversa o no. Incluso se puede dar una fórmula de la matriz inversa usando determinantes.

Observación 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base del mismo. Sean $\{u_i\}_{i=1,..,r} \subset V$, r vectores de V. Se considera la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,r} \\ \vdots & & \\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,r} \end{pmatrix},$$

la matriz de la coordenadas de las vectores u_i (en columna) respecto de la base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,i} v_k.$$

Como la aplicación lineal que lleva unas bases en otras:

$$\begin{array}{ccccc} T & : & V & \to & \mathbb{R}^n \\ & & v_k & \to & e_k \end{array}$$

es un ***isomorfismo lineal****, entonces el rango de los vectores $\{u_i\}_{i=1,..,r} \subset V$, es el mismo que el de los vectores*

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} \\ \vdots \\ \lambda_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_{1,2} \\ \vdots \\ \lambda_{n,2} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \lambda_{1,r} \\ \vdots \\ \lambda_{n,r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Luego el estudio de rangos de vectores se reduce al estudio de rangos de matrices con entradas en $\mathbb{R}$ (o en su casos en otro cuerpo $\mathbb{K}$).

Lema 1. *Sea A una matriz cuadrada de modo que una fila o columna es combinación lineal de las otras, entonces*

$$|A| = 0.$$

Demostración: Supongamos que la columna j de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

es combinación lineal de las otras columnas, así

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \sum_{k=1;k\neq j} \lambda_k a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & \sum_{k=1;k\neq j} \lambda_k a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + ... +$$

$$\lambda_n \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

ya que en cada uno de estos determinantes hay dos columnas iguales.

La demostración por filas es análoga, o se puede usar la matriz transpuesta $\square$

Observación 2. *Si $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}^n$ son n vectores linealmente independientes y*

$$A = (u_1 u_2 \qquad u_n)$$

es la matriz que tiene por columas a los vectores u_i, entonces el $Rang A = n$

Ejemplo 1. *Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene que $|A| = 0$.*

Demostración: Claro, al tercera columna se consigue multiplicando por $1/3$ a primera columna y sumandole la segunda multiplicada por $-1/3$ $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es