ÁLGEBRA LINEAL.

Subespacios Invariantes.

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Se considera un endomorfismo*

$$f : V \to V,$$

una aplicación lineal de V en si mismo.

A) *Un subespacio vectorial $L \subset V$ se llama* ***Invariante*** *respecto del endomorfismo f si*

$$f(L) \subset L,$$

es decir si la imagen de L por el endomorfismo f está dentro del propio L.

B) *Se llama* ***Autovalor*** *(o* ***valor propio****) repecto de f a todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$ de modo que existe $v \in V \backslash \{0\}$ tal que*

$$f(v) = \lambda v.$$

C) *Se llama* ***Autovector*** *(o* ***vector propio****) de V a todo vector $v \in V \backslash \{0\}$ tal que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$f(v) = \lambda v.$$

Observación 1. *A todo autovalor (o valor propio) le corresponde* ***al menos un*** *autovector (o vector propio). A todo autovector le corresponde un único autovalor.*

Ejemplo 1. *Sea $f(x) = Jx$ un endomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$ de modo que la matriz J es diagonal, es decir*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Cada entrada de la diagonal λ_i es un autovalor para f (no tienen por que ser distintos); y a cada uno de ellos le corresponde el autovector $e_i = (0, .., 0, 1_{i\text{-ésimacoordenada}}, 0, .., 0)$.

Observación 2. *Si v es un autovector asociado al autovalor λ respecto del endomorfismo f, entonces*

$$v \in Ker(f - \lambda I),$$

donde I es el endomorfismo identidad.

Demostración: Claro, si v es autovector se tiene que

$$f(v) = \lambda v \qquad \Leftrightarrow \qquad f(v) - \lambda v = (f - \lambda I)v = 0.$$

De hecho, todo vector $v \in Ker(f - \lambda I)$ es un autovector para el autovalor λ $\square$

Definición 2. *Sean $f : V \to V$ un endomorfismo y λ un autovalor de f. Se llama*

$$L_\lambda = \{v \in V \ : \ f(v) = \lambda v \},$$

el conjunto de los autovalores asociados al autovalor λ.

Proposición 1. *Sean $f : V \to V$ un endomorfismo y λ_1 y λ_2 dos autovalores de f*

a) *L_{λ_i} es un subespacio vectorial de V, invariante respecto de f. Además*

$$dim L_{\lambda_i} \geq 1.$$

b) *$L_{\lambda_1} \cap L_{\lambda_2} = \{0\}$ siempre que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

Demostración: **a)** Como vimos en una Observación anterior

$$L_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i I).$$

Luego es un subespacio vectorial, pués lo es el núcleo de una aplicación lineal. Por la propia definición de autovalor, al menos existe un autovector asociado no nulo, luego

$$dim L_{\lambda_i} \geq 1.$$

Además si $v \in L_{\lambda_i}$ se tiene que

$$f(v) = \lambda_i v \in L_{\lambda_i},$$

de lo que deducimos que L_{λ_i} es un subespacio invariante respecto de f.

b) Si $v \in L_{\lambda_1} \cap L_{\lambda_2}$, tenemos que $f(v) = \lambda_1 v$ y $f(v) = \lambda_2 v$. Así

$$\lambda_1 v = \lambda_2 v \qquad \Leftrightarrow \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0,$$

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, lo anterior solo puede ocurrir si

$$v = 0 \qquad \square$$

Ejemplo 2. *Si $Kerf \neq \{0\}$, entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de f y*

$$L_0 = Kerf.$$

Observación 3. *Si $f : V \to V$ es un endomorfismo y $dimV = n$, entonces f a lo más solo puede tener n autovalores distintos.*

Demostración: Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ los autovalores distintos de f. Entonces

$$L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + ... + L_{\lambda_r} \subset V.$$

Como $L_{\lambda_i} \cap L_{\lambda_j} = \{0\}$ si $i \neq j$, entonces la fórmula de la dimensión nos dice que

$$dim(L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + ... + L_{\lambda_r}) = dimL_{\lambda_1} + dimL_{\lambda_2} + ... + dimL_{\lambda_r} \leq n.$$

Como cada $dimL_{\lambda_i} \geq 1$, no puede haber ocurrir que $r > n$ $\qquad \square$

Ahora estamos en condiciones de caracterizar los endomorfismos diagonalizables, aquellos que tiene una matriz asociada semejante a una matriz diagonal.

Proposición 2. *Un endomordismo $f : V \to V$ es diagonalizable si y solo si*

$$L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + ... + L_{\lambda_r} = V,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ son todos los autovalores distintos de f.

Demostración: En esta prueba vamos a ver como como la matriz A, asociada a la aplicación f, se transforma en otra matriz diagonal semejante.

Supongamos que $dimV = n$.

$\Rightarrow$) Si f es diagonalizable, es decir si su matriz asociada A es semejante a una diagonal, existe una base de V, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, de modo que la matriz J asociada a f, referida a esta base, es diagonal

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Así $f(v) = Jv$, siempre que $v = \sum_{k=1}^{n} x'_i v_i$. En particular como $v_i = (0, ..., 0, 1, 0.., 0)$ en coordenadas respecto de la base B, se tiene que

$$f(v_i) = \lambda_i v_i = (0, ..., 0, \lambda_i, 0.., 0) \qquad \text{para toda} \quad i = 1, 2, .., n.$$

Luego los $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son autovalores para f (no necesariamente distintos), cada uno de ellos lleva asociado un autovector de la base v_i.

Sean los autovalores distintos son $\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_r}$ que se repiten $s_1, s_2, ..., s_r$ veces respectivamente. Observemos que

$$s_1 + s_2 + ... + s_r = n.$$

Entonces

$$L_{\lambda_{i_j}} \supseteqq [v_{j_1}, ..., v_{j_{s_j}}] \qquad \text{para} \quad j = 1, 2, ..., r,$$

donde estos vectores son de la base B y todos distintos. Así, teniendo en cuenta que los subespacios $L_{\lambda_{i_j}}$ tienen intersección nula dos a dos,

$$V = L[v_{1_1}, ..., v_{1_{s_1}}] + L[v_{2_1}, ..., v_{2_{s_2}}] + ... + L[v_{r_1}, ..., v_{r_{s_r}}] \subset$$

$$L_{\lambda_{i_1}} + L_{\lambda_{i_2}} + ... + L_{\lambda_{i_r}} \subset V.$$

Por tanto

$$V = L_{\lambda_{i_1}} + L_{\lambda_{i_2}} + ... + L_{\lambda_{i_r}}.$$

$\Leftarrow$) Si $V = L_{\lambda_{i_1}} + L_{\lambda_{i_2}} + ... + L_{\lambda_{i_r}}$, donde $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, ..., \lambda_{i_r}$ son los autovalres distintos de f, elegimos bases de cada uno de estos subespacios

$$\begin{array}{lll} \{v_{1_1}, ..., v_{1_{s_1}}\} & \text{base de} & L_{\lambda_{i_1}}, \\ \{v_{2_1}, ..., v_{2_{s_2}}\} & \text{base de} & L_{\lambda_{i_2}}, \\ & \vdots & \\ \{v_{1_r}, ..., v_{r_{s_r}}\} & \text{base de} & L_{\lambda_{i_r}}. \end{array}$$

Observemos que $s_1 + s_2 + ... + s_r = n$, por ser V suma de subespacios con intersección nula dos a dos. Además los vectores de estas bases son todos autovectores, luego si los juntamos

$$\{v_{1_1}, ..., v_{1_{s_1}}, v_{2_1}, ..., v_{2_{s_2}}, ..., v_{1_r}, ..., v_{r_{s_r}}\}$$

tenemos una base de V y respecto de esta base f tiene una forma matricial

$$f(v) = \left(\begin{array}{ccc|cccc}
\lambda_{i_1} & & 0 & & & & \\
& \ddots & & & & 0 & \\
0 & & \lambda_{i_1} & & & & \\
\cline{1-3}
& & & \lambda_{i_2} & & 0 & \\
& & & & \ddots & & \\
& & & 0 & & \lambda_{i_2} & \\
& & & & & & \ddots \\
& & & & & & \lambda_{i_r} \quad 0 \\
& 0 & & & & & \ddots \\
& & & & & & 0 \quad \lambda_{i_r}
\end{array}\right) v,$$

donde cada "caja" correspondiente a λ_{i_j} tiene orden $s_j \times s_j$. Luego respecto de la nueva base f tiene asociada una matriz diagonal $\square$

Corolario 1. *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo, con $dimV = n$. Si f tiene $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.*

Demostración: Como

$$L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + ... + L_{\lambda_n} \subset V,$$

cada L_{λ_i} tiene dimensión mayor o igual a 1 y son disjuntos dos a dos, concluimos que

$$L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + ... + L_{\lambda_n} = V.$$

Por la Proposición anterior f es diagonalizable $\square$

Ejemplo 3. *Se puede comprobar que la aplicación lineal que tiene asociada por matriz a*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene por autovalores $\{-1, 1, 2, 3\}$. Cuatro autovalores distintos. Por tanto va existir una matriz regular Q, $|Q| \neq 0$, demodo que

$$Q^{-1}DQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Preguntas que nos podemos hacer son:

- ¿cómo calcular los autovalores de una matriz cuadrada?
- ¿Como Calcular al matriz Q de paso?

Estas preguntas las vamos a contestar en las lecciones siguientes.

Ejercicio 1. *Hay que probar que dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores.*

Demostración: Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada. Sea la aplicación lineal asociada $f(x) = Ax$. Sea

$$B = Q^{-1}AQ,$$

donde Q es una matriz regular. B es semejante a A y la aplicación f asociada a B no es más que la anterior con un cambio de coordenadas. Luego si vector $v \in \mathbb{R}^n$ verifica que $f(v) = \lambda v$, esto es así independientemente de las coordenadas que usemos.

De forma analítica. Sea $A \in M_n$ y sea $B = Q^{-1}AQ$ una matriz semejante. Supongamos que λ es un autovalor de A (o de la aplicación lineal asociada $f(x) = Ax$. Sea v el autovector asociado a λ, es decir que $Av = \lambda v$. Tomamos

$$w = Q^{-1}v.$$

Así

$$Bw = (Q^{-1}AQ)Q^{-1}v = Q^{-1}(Av) = Q^{-1}\lambda v = \lambda(Q^{-1}v) = \lambda w.$$

Luego si λ es un autovalor de A tambien lo es de B y diceversa $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`