ÁLGEBRA LINEAL.

Cálculo de la Matriz de Paso.

Si A es una matriz cuadrada de orden n **diagonalizable**, es decir **semejante a una matriz diagonal**, entonces existe una matriz Q regular ($|Q| \neq 0$) y J una matriz diagonal de modo que

$$J = Q^{-1}AQ.$$

Definición 1. *A la matriz Q se le llama **Matriz de Paso**.*

Nos podemos preguntar como determinar si una matriz es diagonalizable. También como calcular su matriz de paso, en el caso de ser diagonalizable.

Las respuestas a estas preguntas, ahora, son sencillas de dar.

- Se resuelve la **ecuación característica**:

$$0 = |A - \lambda I|.$$

- Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ todas las raíces del polinomio característico, distintas y todas reales, con

$$|A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{s_2}(\lambda - \lambda_1)^{s_2}........(\lambda - \lambda_r)^{s_r},$$

donde s_j es la multiplicidad de la raíz λ_j, así

$$s_1 + s_2 + ... + s_r = n \qquad (A \in M_n).$$

- Si

$$dimL_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + ... + L_{\lambda_r} =$$

$$dimKer(A - \lambda_1 I) + dimKer(A - \lambda_2 I) + ... + dimKer(A - \lambda_r I) =$$

$$s_1 + s_2 + ... + s_r = n,$$

entonces A es diagonalizable.

- Consideramos

$$\begin{array}{cll} \{v_1, ..., v_{s_1}\} & \text{una base de} & L_{\lambda_1} = Ker(A - \lambda_1 I) \\ \{v_{s_1+1}, ..., v_{s_1+s_2}\} & \text{una base de} & L_{\lambda_2} = Ker(A - \lambda_2 I) \\ & \vdots & \\ \{v_{s_1+\ldots+s_{r-1}+1}, ..., v_{s_1+\ldots+s_r}\} & \text{una base de} & L_{\lambda_r} = Ker(A - \lambda_r I). \end{array}$$

- La unión de todos es n vectores

$$B = \{v_1, ..., v_{s_1}, ..., v_{s_1+\ldots+s_r}\}$$

forman una **base** de $\mathbb{R}^n$ **de autovectores**.

- Respecto de esta base, el endomorfismo dado por la matriz A, es decir $f(v) = Av$, tiene por matriz la matriz diagonal

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & & & 0 \\ \hline & \begin{matrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & & & \begin{matrix} \lambda_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix} \end{array} \right)$$

donde la caja correspondiente al autovalor λ_j es de orden s_j.

- Por último, la **matriz Q de paso**, es la matriz de cambio de coordenadas de las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^n$ a las correspondientes a la nueva base B. Así Q es la matriz que tiene por columnas los vectores v_j en coordenadas canónicas:

$$Q = (\, v_1 \; v_2 \qquad v_{s_1+\ldots+s_r}\,);$$

cada columna j de Q son las coordenadas del vector v_j dadas respecto de la base original (usualmente la canónica) $\square$

Ejemplo 1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. *Vimos (en la lección anterior) que esta matriz tiene por autovalores a* $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ *y* $\lambda = 2$. *Como es de orden tres y tiene tres autovalores distintos es diagonalizable. Vamos a calcular su matriz de paso.*

Demostración: Para cada autovalor calculamos un autovector asociado.

.-$\lambda = 0$. $Ker(A{-}0I) = \{v = (x, y, z) \ : \ Av = 0\}$, puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, buscamos la solución de

$$\begin{array}{cccc} 2x & & 4z & = & 0 \\ 3x & -4y & 12z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x & = & -2z \\ -4y & = & -6z. \end{array}$$

Para $z = 2$ tenemos el vector $v_1 = (-4, 3, 2)$.

.-$\lambda = 1$. $Ker(A - I) = \{v = (x, y, z) \ : \ (A - I)v = 0\}$, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, buscamos la solución de

$$\begin{array}{ccccc} x & & 4z & = & 0 \\ 3x & -5y & 12z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x & = & -4z \\ y & = & 0. \end{array}$$

Para $z = 1$ tenemos el vector $v_2 = (-4, 0, 1)$.

.-$\lambda = 2$. $Ker(A - 2I) = \{v = (x, y, z) \ : \ (A - 2I)v = 0\}$, puesto que $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$, buscamos la solución de

$$\begin{array}{ccccc} & & 4z & = & 0 \\ 3x & -6y & 12z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} z & = & 0 \\ x & = & 2y. \end{array}$$

Para $y = 1$ tenemos el vector $v_3 = (2, 1, 0)$.

Como

$$\mathbb{R}^3 = KerA + Ker(A - I) + Ker(A - 2I),$$

la matriz A es diagonalizable con matriz de paso

$$Q = (\, v_1 \ v_2 \ v_3 \,) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora se puede comprobar que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ \qquad \square$$

Corolario 1. *Sea una matriz diagonalizable de modo que*

$$Q^{-1}AQ = J$$

J *es una matriz diagonal. Para todo* $m \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$A^m = QJ^mQ^{-1}.$$

Demostración:

$$Q^{-1}AQ = J \qquad \Leftrightarrow \qquad A = QJQ^{-1},$$

donde Q es la matriz de paso (invertible). Ahora

$$A^m = (QJQ^{-1})^m = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1}).....{}_{m-\text{veces}}(QJQ^{-1}) =$$

por la propiedad asociativa del producto de matrices

$$QJ......{}_{m-\text{veces}}JQ^{-1} = QJ^mQ^{-1} \qquad \square$$

Observación 1. *Si J es una matriz diagonal*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

es obvio que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$J^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

Lo anterior nos puede servir para calcular la potencia de una matriz A, si es diagonalizable, de un modo más sencillo. En general, para cualquier matriz, existe un método para calcular sus potencias de modo sencillo. este requiere más trabajo y queda fuera de nuestro alcance.

Ejemplo 2. *Queremos calcular*

$$A^7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^7,$$

una potencia de la matriz del ejemplo anterior.

Demostración: Sabemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^7 = \left[Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1} \right]^7 =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 128 \end{pmatrix} Q^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 256 \\ 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 256 \\ 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3/2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 & -504 & 1516 \\ 192 & -256 & 768 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`