ÁLGEBRA LINEAL.

Procesos de Markov Finitos. Matrices Estocásticas.

Sea $M = \{1, 2, ..., N\}$ un **Espacio Muestral** finito (es decir un conjunto finito). Consideramos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ un **Proceso Aleatorio** , es decir una sucesión de **Variables Aleatorias**.

Recordemos que si (Ω, Σ, P) es un **Espacio de Probalibidad**, una variable aleatoria sobre M no es más que una aplicación

$$X_n : \Omega \to M$$

de modo que

$$X_n^{-1}(i) \in \Sigma,$$

así la probabilidad de que ocurra i del conjunto muestral M es precisamente

$$P(X_n^{-1}(i)) = P(X_n = i),$$

donde la última parte de la ecuación es una notación.

Definición 1. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *se llama un* ***Proceso de Markov*** *si la probabilidad condicionada*

$$P(X_{n+1} = i \mid X_n = j,\, X_{n-1} = j_{n-1}, ..., X_1 = j_0\} =$$
$$\textit{probabilidad de que } \ X_{n+1} = i \quad \textit{si antes } \ X_n = j, ..., X_i = j_0$$

$$P(X_{n+1} = i \mid X_n = j, \} = p_{i,j},$$

donde la última parte de igualdad es una notación.

Observación 1. *Lo que ocurre en el paso $n+1$ solo depende de lo que ocurre en el paso anterior n y no de lo ocurrido en el pasado "lejano".*

Así la información del proceso entero viene dada por una **matriz**

$$P = (p_{i,j}) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, .., N \\ j = 1, 2, ..., N \end{array}$$

cuyas entradas son precisamente las probabilidades condicionadas $p_{i,j} = P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$. Observemos que para cada j

$$\begin{matrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{matrix}$$

la columna j-ésima de la matriz P tiene entradas positiva y además

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} P(X_{n+1} = i \mid X_n = j, \} = P(X_{n+1} \in M \mid X_n = j) = 1$$

donde la última igualdad se tiene por las propiedades de las probabilidades.

Definición 2. *Una matriz $P \in M_{N\times N}$ de entradas positivas se llama* ***Matriz Estocástica*** *si para cada j se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i,j} = 1,$$

es decir si para columna de la matriz la suma de sus entrada es 1.

Proposición 1. *Toda matriz estocástica P tiene por autovalor a $\lambda = 1$.*

Demostración: Claro,

$$0 = |P - \lambda I| =$$

sumando a la última fila todas las otras filas

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} - \lambda & \cdots & p_{1,N} \\ \vdots & & \\ 1 - \lambda & & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} p_{1,1} - \lambda & \cdots & p_{1,N} \\ \vdots & & \\ 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

ya que $p_{N,j} = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} P_{i,j}$ $\square$

Definición 3. *Un* ***Estado Estocástico*** *para una matriz estocástica P es un vector*

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N) \in \mathbb{R}^N$$

de modo que

- $\pi_i \geq 0$ *para todo i.*
- $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$.
- $P\pi = \pi$, *es decir π es un autovector para P con autovalor 1.*

Teorema 1. *Toda matriz estocástica tiene un Estado Estocástico.*

Demostración: Es la Proposición anterior $\square$

En Teoría de Probabilidades se puede probar que, si $p_{i,j} > 0$ para todo i, j, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{i,j} = \pi_i \qquad \text{para todo} \qquad j = 1, 2, .., N.$$

Es decir las potencias de la matriz P tiende a una matriz con columna todas iguales al Estado Estocástico.

Corolario 1. *Sea $P = (p_{i,j})$ una matriz estocástica con $p_{i,j} > 0$ para todo i, j. Sea un vector de probabilidad*

$$x = (x_1, .., x_N) \qquad \textit{con entradas positiva y} \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^n x = \pi$$

Demostración: Usando lo anterior, que $\lim_{n\to\infty} P^n = (\pi\ \pi \qquad \pi)$, tiende a una matriz con columnas iguales a π, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^n x = \sum_{i=1}^{N} x_i \pi = (\sum_{i=1}^{N} x_i)\pi = \pi \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`