

Espacios Vectoriales.

La estructura lineal siguiente aparece repeditamente en Matemáticas como en sus aplicaciones.

Sea V un conjunto y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (para nosotros $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pero también puede ser $\mathbb{C}$ u otros cuerpos; en criptografía serán cuerpos finitos).

Definición 1. Sea V un conjunto, cuyos elementos llamaremos **vectores**; sobre V tenemos definidas dos operaciones:

1) Una **suma**

$$\begin{array}{rcl} + & : & V \times V \rightarrow V \\ & & (u, v) \rightarrow u + v \end{array} .$$

2) Un **producto por escalares**

$$\begin{array}{rcl} + & : & \mathbb{K} \times V \rightarrow V \\ & & (\lambda, v) \rightarrow \lambda v \end{array} .$$

Con las siguientes propiedades:

para la suma,

si $u, v, w \in V$ se tiene las propiedades

$a_1)$ **Conmutativa:** $u + v = v + u$

$a_2)$ **Asociativa:** $u + (v + w) = (u + v) + w$

$a_3)$ **Elemento neutro:** existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = 0 + u = u$.

$a_4)$ **Elemento opuesto:** para cada u , existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

Para el producto por escalares,

Si $u, v \in V$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ se tienen las propiedades:

$b_1)$ $(\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u$.

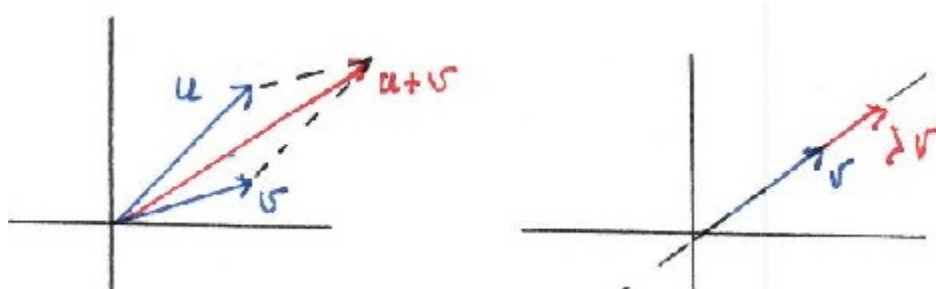
$b_2)$ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

$b_3)$ $\lambda(\beta u) = (\lambda\beta)u$.

$b_4)$ $1u = u$.

A este conjunto, con sus operaciones y propiedades $(V, +, \times)$ le llamamos **Espacio Vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Ejemplos 1. ■ $\mathbb{R}^2$ con la suma de vectores y el producto escalar es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

FIGURA 1. Operaciones en $\mathbb{R}^2$

- En general $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$ con la suma de vectores y el producto por escalares

suma: $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

producto por escalares : $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

- El conjunto de matrices $n \times m$ ($n, m \in \mathbb{N}$),

$$M_{n \times m}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} : a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

con la suma de matrices y el producto por un escalar es otro ejemplo de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

- Las funciones continuas

$$C[0, 1] = \{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua} \}$$

con la suma de funciones y el producto de un escalar por una función, es otro ejemplo de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Proposición 1. Sea V un espacio vectorial, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Para todo $u, v, w \in V$, si $v + u = v + w$, entonces

$$u = w.$$

2. Si $0_1, 0_2 \in V$ son dos elementos neutros para la suma de V , entonces

$$0_1 = 0_2,$$

es decir el elemento neutro es único.

3. Si $0 \in \mathbb{R}$, entonces para todo $v \in V$ se tiene que

$$0v = 0 \in V$$

Demostración:

1. Si $v + u = v + w$, como existe el opuesto de v , es decir tomamos $-v$ y sumamos en ambos lados de la igualdad

$$-v + (v + u) = -v + (v + w),$$

aplicando la propiedad asociativa y que $-v + v = 0$ (elemento neutro), llegamos a que

$$u = w.$$

2. Si $0_1, 0_2 \in V$ son dos elementos neutros para la suma de V , entonces

$$0_1 + 0_2 = 0_2,$$

pero también

$$0_1 + 0_2 = 0_1,$$

de lo que se sigue que

$$0_1 = 0_2.$$

3. Si $0 \in \mathbb{R}$, entonces $0 + 1 = 1$ y así

$$1v = (0 + 1)v = 0v + 1v.$$

Aplicando el apartado 1. tenemos que

$$0v = 0 \in V \quad \square$$