ÁLGEBRA LINEAL.

Aplicaciones de los cambios de Bases.

Elegir una base en lugar de otra, es decir hacer un cambio de coordenadas, puede simplificar algunos problemas. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. *Veremos más adelante que dada una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}$, el problema de calcular sus potencias A^k es más sencillo con un sutil cambio de coordenadas. El cálculo de potencias de una matriz A^k puede aparecer en:*

- ***sistemas** lineales de **ecuaciones diferenciales** (estas ecuaciones están relacionadas con los circuitos eléctricos multimalla).*
- *Procesos discretos de Markov (Estadística).*
- *Sucesiones recurrentes (Mat. Discreta). Ecuaciones en diferencias lineales.*

Ejemplo 2. *En Geometría, una expresión del tipo:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*se reconoce como la ecuación de una **elipse***

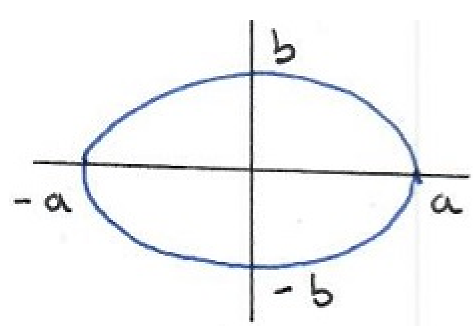

Figura 1. Elipse simétrica respecto a los ejes.

Demostración: Podemos pesar en otra elipse de modo que los ejes de coordenadas no sean ejes de simetría de la elipse.

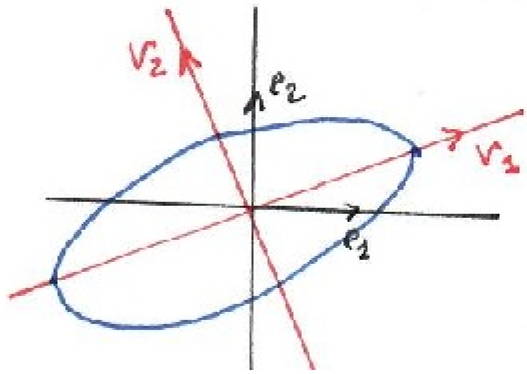

FIGURA 2. Elipse simétrica respecto a los ejes.

Podríamos encontrar una mejor ecuación de esta figura si en lugar de tomar la base $\{e_1, e_2\}$ en el plano, tomasemos la base $\{v_1, v_2\}$ cuyos elementos están sobres los ejes de simetría de la elipse $\square$

Ejemplo 3. *Consideramos el conjunto del plano:*

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 45x^2 + 6xy + 13y^2 = 36 \}.$$

¿Que forma tiene E ?

Demostración: Vamos a completar cuadrados:

$$45x^2 + 6xy + 13y^2 = 36 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{45})^2x^2 + 2\sqrt{45}\frac{1}{2\sqrt{45}}6xy + \frac{36}{4\times 45}y^2 - \frac{36}{4\times 45}y^2 + 13y^2 = 36$$

Lo cuál se puede escribir como

$$\left(\sqrt{45}x + \frac{6}{2\sqrt{45}}y\right)^2 + \left(\sqrt{13 - \frac{36}{4\times 45}}\, y\right)^2 = 36.$$

El cambio de variable

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{45}x + \tfrac{6}{2\sqrt{45}}y \\ y' &= \sqrt{13 - \tfrac{36}{4\times 45}}\, y \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{45} & \frac{6}{2\sqrt{45}} \\ 0 & \sqrt{13 - \frac{36}{4\times 45}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nos deja la ecuación de E en

$$\frac{x'^2}{6^2} + \frac{x'^2}{6^2} = 1.$$

Lo que nos permite ver E como una elipse $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es