**Dependencia Lineal.**

En un espacio vectorial $V$, un sistema de vectores $\{\ v_1, v_2, ...., v_n\ \}$ no es más que una familia (o subconjunto) finita de vectores de $V$.

**Definición 1.** *Dado un sistema de vectores $\{\ v_1, v_2, ...., v_n\ \} \subset V$ de un espacio vectorial $V$ se dice que el vector $u \in V$ es **combinación lineal** de los vectores del sistema si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + ..... + \lambda_n v_n.$$

**Ejemplo 1.** *Consideramos el sistema de vectores de $\mathbb{R}^2$ dado por $\{\ e_1, e_2\ \}$ donde*

$$e_1 = (1, 0) \qquad y \qquad e_2 = (0, 1).$$

*Entonces, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que*

$$(x, y) = xe_1 + ye_2,$$

*es decir el vector (x,y) es combinación lineal de los vectores $e_1$ y $e_2$*

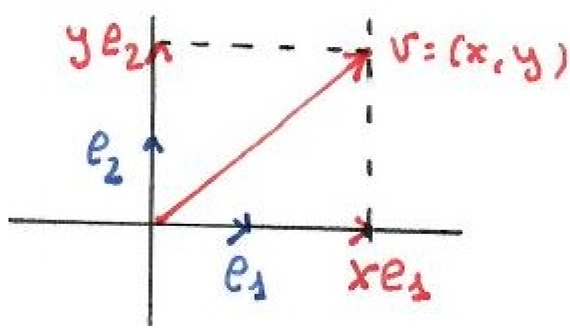


Figura 1. Combinación lineal.

**Ejemplo 2.** *En general en $\mathbb{R}^n$, si consideramos los vectores*

$$e_k = (0, 0, .., 1, 0, ..., 0) \qquad para \qquad K = 1, 2, ..., n$$

*donde el "1" del vector $e_k$ aparece en la k-ésima coordenada, entonces para todo vector*

$$u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

*se tiene que*

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

*es decir $u$ es combinación lineal de los vectores del sistema $\{e_k\}_{k=1}^{n}$.*

Esta situación en la que todos los vectores de un espacio vectorial se pueden representar como combianción lineal de unos pocos, vamos a ver que es algo general.

**Observación 1.** *Sea $\{ v_1, v_2, ...., v_n \}$ un sistema de vectores de $V$, entonces*

a) $0 \in V$, *es combinación lineal del sistema, ya que*

$$0 = \sum_{k=1}^{n} 0 v_k,$$

*donde los coeficientes $''0''$ de los vectores $v_k$ son el cero de $\mathbb{R}$.*

b) *Para cada $j = 1, 2, .., n$*

$$v_j = 1 v_j + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} 0 v_k.$$

c) *Si $u \in V$ es combinación lineal de $\{ u_1, u_2, ...., u_m \} \subset V$ y cada $u_j$ es combinación lineal de $\{ v_1, v_2, ...., v_n \} \subset V$, entonces $u$ es combinación lineal de $\{ v_1, v_2, ...., v_n \}$*

***Demostración:*** c). Sean $u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j$ y para cada $j = 1, ..., m$ $u_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} v_k$. Entonces

$$u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} v_k \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \lambda_{j,k} \right) v_k \qquad \square$$

**Definición 2.** *Sea $V$ un espacio vectorial.*

A) *Se dice que los vectores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ son* ***linealmente dependientes*** *si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$* ***no*** *todos nulos de modo que*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$$

B) *Se dice que los vectores* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *son* ***linealmente independientes*** *si* ***no*** *existen escalares* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ ***no*** *todos nulos de modo que*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0.$$

*Equivalente a decir que:* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *son* ***linealmente independientes*** *si siempre que*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0,$$

*entonces*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = .... = \lambda_n = 0.$$

**Ejemplo 3.** *Sea* $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ *(definidos como antes). Estos vectores son linealmente independientes. En general* $e_1, e_2, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$ *son linealmente independientes.*

***Demostración:*** Si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, entonces

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0),$$

así $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ $\square$

**Observación 2.** *Si* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *son vectores linealmente dependientes, entonces existe al menos un de ellos* $v_{k_0}$ *de modo que este es combinación lineal del resto.*

***Demostración:*** Existen $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos (supongamos que $\lambda_{k_0} \neq 0$) de modo que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_k = 0.$$

Despejando

$$-\lambda_{k_0} v_{k_0} = \sum_{k=0, k\neq k_0}^{n} \lambda_k v_k,$$

luego como $\lambda_{k_0} \neq 0$

$$v_{k_0} = \sum_{k=0, k\neq k_0}^{n} \frac{-\lambda_k}{\lambda_{k_0}} v_k \qquad \square$$

**Ejercicio 1.** *Dado el vector* $v = (a, 2, -1, b)$ *hay que hallar* $a$ *y* $b$ *para que* $v$ *sea combianción lineal de los vectores* $u_1 = (1, 2, -3, 4)$ *y* $u_2 = (-1, 0, -2, -3)$

***Demostración:*** Si $v$ es combinación lineal de $u_1$ y $u_2$ debe existir números $\lambda_1$ y $\lambda_2$ de modo que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2;$$

igualando coordenadas llegamos al sistema

$$\begin{array}{ccccc} a & = & \lambda_1 & - & \lambda_2 \\ 2 & = & 2\lambda_1 & & \\ -1 & = & -3\lambda_1 & - & 2\lambda_2 \\ b & = & 4\lambda_1 & - & 3\lambda_2 \end{array}.$$

Las ecuaciones segunda y tercera nos dicen que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones primera y cuarta, se ve que necesariamente $a = 2$ y $b = 7$ para que el sistema sea compatible $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

*E-mail address*: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es