

Bases en un Espacio Vectorial.

Definición 1. (**Sistema de Generadores**) Un sistema de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ de un espacio vectorial V se dice que es un **Sistema de Generadores** de V si para todo $u \in V$ este es una combinación lineal finita de elementos del sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Ejemplos 1. ■ $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$, como vimos en la lección anterior.

- Sea $P[x] = \{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 : a_m, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales. La suma de polinomios y el producto por escalares hacen de $P[x]$ un espacio vectorial. El sistema

$$\{x^m\}_{m=0}^{\infty}$$

es un sistema de generadores de $P[x]$.

Demostración: Sea $Q(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado m de $P[x]$. Claramente Q es combinación lineal de

$$\{1, x, x^2, \dots, x^m\} \subset \{x^m\}_{m=0}^{\infty} \quad \square$$

Un espacio vectorial puede tener un sistema de generadores finito o infinito. Aquí nos vamos a concentrar en los espacios vectoriales con sistemas de generadores finitos.

Definición 2. Un espacio vectorial V se dice que es de **dimensión finita** si tiene al menos un sistema de generadores finito.

Definición 3. Un sistema de generadores de un espacio vectorial V se dice que es una **Base** si los vectores del sistema son linealmente independientes.

Ejemplos 2. ■ $\{e_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, como vimos en la lección anterior. A esta base se le llama Base Canónica.

- Sea $e_{k,r} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ definida por

$$e_{k,r} = (a_{i,j}) \quad \text{donde} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, j = r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El sistema $\{e_{k,r}\}_{k=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ es una base del espacio vectorial de las matrices $M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Igualando coordenadas, tenemos el sistema lineal

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & + & 3z & = & a \\ & & 2y & + & 3z & = & b \\ 2x & & & + & z & = & c \end{array}$$

Este sistema, como antes, lo resolvemos por Gauss. Haciendo $E_3 - 2E_1$

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & + & 3z & = & a \\ & & 2y & + & 3z & = & b \\ & & -2y & + & -5z & = & -2a \end{array}$$

y ahora si $E_3 + E_2$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & y & + & 3z & = & a \\ & & 2y & + & 3z & = & b \\ & & & & -2z & = & -2a + b \end{array}.$$

Este sistema triangular tiene una única solución, $z = \frac{2a-b}{2}, \dots$ etc Luego u se puede escribir como una combinación lineal de los vectores u_1, u_2 y u_3 . Luego forman un sistema de generadores.

Como $\{u_1, u_2, u_3\}$ son un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ y los tres vectores son linealmente independientes, podemos concluir que el sistema forma una Base $\square$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FA-
CULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar.Ruiz@mat.ucm.es