ÁLGEBRA LINEAL.

Subespacios Vectoriales.

Todos los espacios finitamente generados tienen bases y en cada espacio vectorial estas bases tienen el mismo cardinal (el mismo número de vectores). Este resultado es el llamado **Teorema de la Base**. Antes de verlo necesitamos entender el importante concepto de **Subespacio Vectorial**.

Definición 1. *Un subconjunto no vacío $L \subset V$, V espacio vectorial, se llama variedad lineal o **subespacio vectorial** si $(L; +, \cdot)$, L con la suma y el producto por escalares de V, es a su vez un espacio vectorial.*

Teorema 1. *Sean V un espacio vectorial y $L \subset V$ un subconjunto no vacío. Son equivalentes:*

a) *L es un subespacio vectorial de V.*
b) b_1) *Para todo $v_1, v_2 \in L$, se tiene que $v_1 + v_2 \in L$.*
   b_2) *Para todo $v \in L$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda v \in L$.*

Demostración: Es bastante evidente (Ejercicio) $\square$

Ejemplo 1. *Sea*

$$L = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x, y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3.$$

L es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

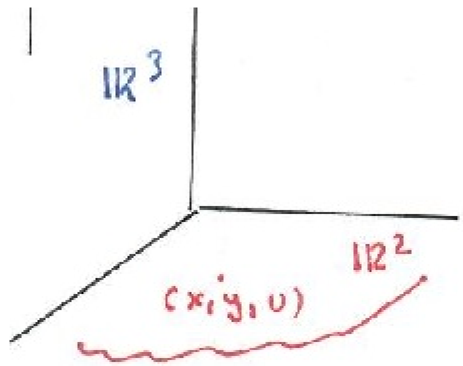

FIGURA 1. $\mathbb{R}^2$ inmerso en $\mathbb{R}^3$.

Demostración: Obviamente

$b_1)$ $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0) \in L$.

$b_2)$ $\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0) \in L$.

Además $e_1 = (1, 0, 0)$ y $e_2 = (0, 1, 0)$ forman una base de L. Observemos que L es como $\mathbb{R}^2$ inmerso en $\mathbb{R}^3$ $\square$

Ejemplo 2. *Sean V un espacio vectorial y $\{ v_1, .., v_n \}$ un sistema de vectores de V. Definimos L como el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos del sistema*

$$L = \{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \quad : \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \},$$

que también notamos por

$$L = L[\ v_1, .., v_n\ ] = [\ v_1, .., v_n\ ].$$

Entonces L es un subespacio vectorial de V y además $\{ v_1, .., v_n \}$ es un sistema de generadores para L.

Demostración: Sean $u_1, u_2 \in L$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos escribir

$$u_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \qquad \text{y} \qquad u_2 = \sum_{k=1}^{n} \eta_k v_k,$$

entonces

$$\lambda u_1 + u_2 = \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k + \sum_{k=1}^{n} \eta_k v_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda \lambda_k + \eta_k) v_k \in L.$$

Además como obviamente cada $v_k \in L$, por definición de sistema de generadores, $\{ v_1, .., v_n \}$ lo es de L $\square$

Ejemplo 3. *Sea un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas **homogéneo**,*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n,m}x_m & = & 0 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad Ax = 0$$

donde $A = (a_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Entonces el conjunto de soluciones del sistema S es un subspacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{R}^m$ dos soluciones del sistema ($Ax = 0$ y $Ay = 0$), así $x, y \in S$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces usando las propiedades del producto de matrices

$$A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay = 0,$$

lo que prueba que $\lambda x + y \in S$. Luego S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ $\square$

Ejercicio 1. *a) Sea $W = \{(x, y, z, w) \ : \ x + y + z + w = 0, \ x + y - z - w = 0 \ \}$. Probar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.*

b) Hay que ver que $u_1 = (1, -1, 3, -3), u_2 = (0, 0, 1, -1) \in W$ y que forman una base.

Demostración: a) Por el ejemplo anterior, sabemos que W es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ ya que es el conjunto de las soluciones de un sistema de ecuaciones 2×4.

b) Es fácil comprobar que $u_1, u_2 \in W$ y que son linealmente independientes. Si vemos que generan a W estonces será claro que forman una base. Observemos que

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w & = & 0 \\ x & + & y & - & z & - & w & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w & = & 0 \\ & & & & z & + & w & = & 0 \end{array},$$

lo que a su vez es equivalente a

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & & & & = & 0 \\ & & & & z & + & w & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} x & = & -y & & \\ y & = & y & & \\ z & = & & - & w \\ w & = & & & w \end{array}$$

y también a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores linealmente independientes

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son generadores de W, por tanto forman una base de W. Ahora como claramente (si no resolviendo el sistema correspondiente)

$$\begin{array}{rcrcr} u_2 & = & & - & v_2 \\ u_1 & = & - \quad v_1 & - & 3v_2 \end{array},$$

los vectores u_1 y u_2 también generan a W $\square$

Algo que ya propusimos anteriormente:

Ejercicio 2. *Sea un sistema de ecuaciones lineales*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n, \end{array} \right.$$

y sea el sistema homogéneo asociado al anterior

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & 0, \end{array} \right.$$

Sea S el conjunto de soluciones del sistema homogéneo (2) *y llamemos S' al conjunto de soluciones del sistema* (1). *Prueba que*

a) *si $x, y \in S'$ entonces $y - x \in S$.*
b) *Si $x \in S$ e $y \in S'$, entonces $x + y \in S'$.*
c) *Si y es una* ***solución particular*** *del sistema* (1), *entonces*

$$S' = \{\, y + x \quad : \quad x \in S \,\} = y + S,$$

donde la última igualdad es una notación (que cobrará sentido con las operaciones entre espacios vectoriales que vemos a continiación).

Demostración: Si escribimos el sistema como $Ax = b$, con $A = (a_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y tomamos $y \in S'$, es decir $Ay = b$; y $x \in S$, es decir $Ax = 0$, por las propiedades de la multiplicación de matrices

$$A(y + x) = Ay + Ax = b + 0,$$

luego $y + x \in S'$. Hemos visto que $y + S \subset S'$.

Si ahora tomamos $y' \in S'$ y escribimos

$$y' = y + (y' - y),$$

como es fácil ver que $y' - y \in S$, acabamos de probar que $S' \subset y + S$. Por tanto $S' = y + S$ $\square$

Observación 1. *Un subespacio vectorial L de un espacio vectorial V puede venir dado por una base*

$$L = L[v_1, v_2, .., v_j]$$

o bien por unas ecuaciones implícitas

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m-j,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m-j,m}x_m & = & 0 \end{array}.$$

La relación entre el número de elementos de una base y el número de ecuaciones para un subespacio L la veremos más adelante.

Operaciones con Subspacios Vectoriales.

Proposición 1. *Si L_1 y L_2 son dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, entonces la* ***intersección***

$$L_1 \bigcap L_2$$

es un nuevo subespacio de V.

Demostración: Observemos que $L_1 \bigcap L_2 \neq \emptyset$, ya que al menos $0 \in L_1 \bigcap L_2$. Ahora si $x_1, x_2 \in L_1 \bigcap L_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces como L_1 y L_2 son subespacios vectoriales se tiene que

$$\lambda x_1 + x_2 \in L_1$$

y

$$\lambda x_1 + x_2 \in L_2;$$

por tanto

$$\lambda x_1 + x_2 \in L_1 \bigcap L_2.$$

Así $\in L_1 \bigcap L_2$ es un subepacio vectorial de V $\square$

Ejemplo 4. *Si tenemos un sistema de dos ecuaciones (o más) lineales homogéneas*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & = & 0 \end{array}.$$

Si llamamos S_1 al subespacio solución de la primera ecuación y S_2 al subespacio solución de la segunda ecuación, parece claro que el subespacio solución del sistema S es precisamente la intersección

$$S = S_1 \bigcap S_2.$$

Definición 2. *Dados dos subespacios vectoriales L_1 y L_2 de un espacio vectorial V, se define el* ***subespacio suma*** *por*

$$L_1 + L_2 = \{v \in V \ : \ \textit{existen } v_1 \in L_1 \ \textit{y } v_2 \in L_2 \ \textit{con } v = v_1 + v_2 \ \}.$$

Proposición 2. *$L_1 + L_2$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Sean $w_1, w_2 \in L_1 + L_2$, con

$$w_1 = v_{1,1} + v_{1,2} \quad \text{para} \quad v_{1,1} \in L_1 \text{ y } v_{1,2} \in L_2$$

y

$$w_2 = v_{2,1} + v_{2,2} \quad \text{para} \quad v_{2,1} \in L_1 \text{ y } v_{2,2} \in L_2.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda(v_{1,1} + v_{1,2}) + (v_{2,1} + v_{2,2}) =$$

$$(\lambda v_{1,1} + v_{2,1}) + (\lambda v_{1,2} + v_{2,2}).$$

Como

$$\lambda v_{1,1} + v_{2,1} \in L_1 \qquad \text{y} \qquad \lambda v_{1,2} + v_{2,2} \in L_2,$$

se llega a que $\lambda w_1 + w_2 \in L_1 + L_2$, lo que prueba que la suma de subespacios vectoriales es de nuevo un subespacio vectorial $\square$

Ejemplo 5. *Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$:*

$$U = L[(0,1,2),(1,0,1),(2,2,0)]$$

y

$$W = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0; \ z = 0 \,\}.$$

Hay que hallar las ecuaciones implícitas y las bases de $U \bigcap W$ y $U + W$.

Demostración: Observemos que $(0,1,2),(1,0,1)$ y $(2,2,0)$ son tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Por tanto forma un base de $\mathbb{R}^3$. Luego

$$U = \mathbb{R}^3$$

y así

$$U \bigcap W = W \qquad y \qquad U + W = U = \mathbb{R}^3.$$

Las ecuaciones implícitas de $\mathbb{R}^3$, no hay ya que no hay restricciones (cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ está en $\mathbb{R}^3$).

Las ecuaciones implícitas de $U \bigcap W = W$ son precisamente

$$x + y = 0 \qquad \text{y} \qquad z = 0.$$

Una base de W la obtenemos del siguiente modo (como en el Ejercicio primero):

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & & = 0 \\ & & & z & = 0 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{rcr} x & = & -y \\ y & = & y \\ z & = & 0 \end{array}$$

y así

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así $W = L[(-1,1,0)]$ $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`