ÁLGEBRA LINEAL.

Aplicación de las bases: Rango de un conjunto de vectores.

Definición 1. *Sean* $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ *n vectores de un espacio vectorial* V*. Se llama* ***Rango*** *del conjunto de vectores* $\{v_1, ..., v_n\}$ *a la dimensión del subespacio vectorial*

$$L = L[v_1, ..., v_n]$$

o equivalentemente al mayor número de vectores linealmente independientes entre los vectores $\{v_1, ..., v_n\}$*.*

Observación 1. *Consideramos* $L = L[v_1, v_2, ..., v_n]$*. Consideramos* $\{v_{i_1}, ..., v_{i_r}\}$ *y* $\{v_{j_1}, ..., v_{j_s}\}$ *dos subconjunto de* $\{v_1, ..., v_n\}$ *formados por vectores linealmente independientes de modo que*

$$L = L[v_{i_1}, ..., v_{i_r}] \qquad y \qquad L = L[v_{j_1}, ..., v_{j_s}],$$

entonces por el Teorema de la Base

$$r = s.$$

Proposición 1. *Sean* $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ *n vectores de un espacio vectorial* V*, con rango* $m \leq n$*.*

a) *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$*, no nulo, entonces el rango de*

$$\{\, \lambda v_1, v_2, ..., v_n \,\}$$

es m*.*

b) *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces el rango de*

$$\{\, v_1, v_2 + \lambda v_1, v_3, ..., v_n \,\}$$

es m*.*

c) *En general, en un conjunto de vectores, si a uno de ellos lo multiplicamos por un escalar no nulo o a uno le sumamos otro multiplicado por un escalar, el rango de los vectores resultantes es igual al rango de los vectores iniciales.*

Demostración: Por ser $L = [v_1, ..., v_n]$ un subespacio vectorial, con $m = dimL$, y como

$$L = [\lambda v_1, v_2, ..., v_n] = [v_1, v_2 + \lambda v_1, v_3, ..., v_n],$$

se sigue que el rango permanece constante trás las transformaciones de a) o b) $\square$

Ejemplo 1. *Sea*

$$A = L[(1,2,3,4),(0,2,0,2),(1,4,3,6),(1,6,3,8)] \subset \mathbb{R}^4$$

¿Cuál es $dimA$? o ¿Cuál es el rango de esos cuatro vectores de $\mathbb{R}^4$? ¿Una base de A?

Atención: este tipo de problemas se resuelve de forma más rápida usando **determinantes** como veremos más adelante.

Demostración: Los vectores

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & (1,2,3,4) \\ u_2 & = & (0,2,0,2) \\ u_3 & = & (1,4,3,6) \\ u_4 & = & (1,6,3,8) \end{array}$$

forman un sistema de generadores de A. Luego una base de A tendrá a los más 4 elementos. Obviamente

$$u_1 \neq \lambda u_2$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, así $\{ u_1, u_2 \}$ son linealmente independientes.

Por otro lado es claro que

$$u_3 = u_1 + u_2,$$

y por tanto

$$A = L[u_1, u_2, u_4].$$

Ahora nos preguntamos si u_1, u_2 y u_4 son linealmente independientes. Veámoslo. Si

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_4,$$

esto es equivalente a escribir el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}.$$

La primera ecuación y la tercera son equivalentes. Realmente tenemos un sistema tres por tres. Si lo resolvemos, vemos que es de solución única con

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -1,$$

así

$$u_4 = u_1 + 2u_2.$$

Por tanto

$$A = L[u_1, u_2].$$

Como $\{ u_1, u_2 \}$ son linealmente independientes, forman una base de A. Además

$$dim A = 2.$$

O también, el rango de los vectores $\{ u_1, u_2, u_3, u_4 \}$ es dos □

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es