ÁLGEBRA LINEAL.

Aplicación de las bases: Rango de una matriz.

Dada una matriz $A \in M_{n\times m}$ llamamos rango de la matriz al número de filas no nulas de su forma normal de Hemite. No probamos que la forma normal de Hermite fuese única, por lo cuál la definición así dada del rango puede parecer no muy precisa. Veamos que si que lo es.

Definición 1. ***(Rango de una Matriz*** *) Sea $A \in M_{n\times m}$.*

A) *Llamamos* ***Rango por Filas*** *de la matriz A al mayor número de filas (vistas como vectores de $\mathbb{R}^m$) linealmente independientes (o al rango de los vectores fila).*
B) *Llamamos* ***Rango por Columnas*** *de la matriz A al mayor número de columnas (vistas como vectores de $\mathbb{R}^n$) linealmente independientes (o al rango de los vectores columnas).*

Ejemplo 1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$.

Demostración:

- Los dos vectores fila $(1, 2, 3)$ y $(0, 1, 1)$ son linealmente independientes, como vectores de $\mathbb{R}^3$. Luego el rango por filas de la matriz A es dos.
- Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, los tres vectores columna de la matriz, no pueden ser más de dos independientes ya que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es dos. Como los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son independientes, concluimos que el rango de la matriz por columna es también dos.
- Que ambos rangos hayan coincidido no es una casualidad como nos dice el sigueinte Teorema $\square$

Teorema 1. ***(del Rango.****) Dada una matriz $A \in M_{n\times m}$, el rango por filas y por columnas de la matriz A coinciden.*

Definición 2. *El rango de una matriz* $A \in M_{n\times m}$ *se define como su rango por filas o por columnas y se denota por*

$$RangA.$$

Demostración: (del Teorema) Escribimos $A = (C_1C_2...C_m)$, donde $C_j \in \mathbb{R}^n$ es la columna j-ésima vista como un vector de $\mathbb{R}^n$:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \qquad \text{para} \qquad j = 1, 2, ..., m.$$

Supondremos que el rango por columnas de A es

$$r \leq m$$

y por comodidad supondremos que las primeras r columnas $\{ C_1, C_2, ..., C_r \}$ son linealmente independientes. Por tanto

$$C_{r+k} = \lambda_{1,k}C_1 + \lambda_{2,k}C_2 + ... + \lambda_{r,k}C_r \qquad (*)$$

para $k = 1, 2, ..., m - r$.

Teniendo en cuenta como son los vectores fila $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

$$F_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,m}) \in \mathbb{R}^m, \qquad i = 1, 2, .., n.$$

Observamos que las coordenadas i-ésimas de los vectores columna forman las coordenadas de la fila i-ésima. Ahora teniendo en cuenta $(*)$, podemos expresar sus $m - r$ últimas entradas (o coordenadas) de cada fila en función lineal de las r primeras, siendo los coeficientes independientes de la fila considerada, es decir:

$$a_{i,r+k} = \lambda_{1,k}a_{i,1} + \lambda_{2,k}a_{i,2} + ... + \lambda_{r,k}a_{i,r} \qquad (**)$$

para $i = 1, 2, ...n$ y $k = 1, 2, ..., m-r$. Veamos que estos nos asegura que el rango por filas es menor o igual que r. Claro, sea $B = \{ e_1, e_2, ..., e_m \}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Entonces los n vectores fila $F_i \in \mathbb{R}^m$ se escriben como

$$F_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}e_j \qquad \text{para} \qquad i = 1, ..., n.$$

Teniendo en cuenta $(**)$

$$F_i = \sum_{j=1}^{r} a_{i,j}e_j + \sum_{k=1}^{m-r}(\lambda_{1,k}a_{i,1} + \lambda_{2,k}a_{i,2} + ... + \lambda_{r,k}a_{i,r})e_{r+k} =$$

$$\begin{array}{rcl} a_{i,1}e_1 + ... + a_{i,r}e_r & + & (\lambda_{1,1}a_{i,1} + \lambda_{2,1}a_{i,2} + ... + \lambda_{r,1}a_{i,r})e_{r+1} \\ & + & (\lambda_{1,2}a_{i,1} + \lambda_{2,2}a_{i,2} + ... + \lambda_{r,2}a_{i,r})e_{r+2} \\ & & \cdots \\ & + & (\lambda_{1,m-r}a_{i,1} + \lambda_{2,1}a_{i,m-r} + ... + \lambda_{r,m-r}a_{i,r})e_{r+(m-r)} = \end{array}$$

sacando factor común los $a_{i,1}, ..., a_{i,r}$ tenemos

$$\begin{array}{llll} a_{i,1} & (e_1 & + & \lambda_{1,1}e_{r+1} + \lambda_{1,2}e_{r+2} + ... + \lambda_{1,m-r}e_m) \quad + \\ a_{i,2} & (e_2 & + & \lambda_{2,1}e_{r+1} + \lambda_{2,2}e_{r+2} + ... + \lambda_{2,m-r}e_m) \quad + \\ & \dots & & \vdots \\ a_{i,r} & (e_r & + & \lambda_{r,1}e_{r+1} + \lambda_{r,2}e_{r+2} + ... + \lambda_{r,m-r}e_m). \end{array}$$

Si llamamos

$$b_i = e_i + \lambda_{i,1}e_{r+1} + \lambda_{i,2}e_{r+2} + ... + \lambda_{i,m-r}e_m$$

para $i = 1, 2, .., r$, tenemos r vectores de $\mathbb{R}^m$ ($\{b_1, ..., b_r\}$) linealmente independientes(?). Sigamos con la prueba antes de aclarar nuestra última afirmación.

Así por lo visto anteriormente, los vectores fila F_i pertenecen al subespacio $L[b_1, b_2, ..., b_r]$. Ahora por el Teorema de la Base, el máximo número de vectores $\{F_1, ..., F_n\}$ linealmente independientes no puede ser mayor que r, como queríamos probar.

Con un argumento análogo al anterior comenzando por el rango de las filas, digamos s, se vería que $r \leq s$, de lo que se sigue que $r = s$ (?) Solo nos queda ver que los vectores $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ son linealmente independientes. Si para escalares $\beta_1, ..., \beta_r$ se tiene que

$$0 = \beta_1 b_1 + ... + \beta_r b_r =$$

$$\beta_1(e_1 + \lambda_{1,1}e_{r+1} + \lambda_{1,2}e_{r+2} + ... + \lambda_{1,m-r}e_m) +$$

$$\beta_2(e_2 + \lambda_{2,1}e_{r+1} + \lambda_{2,2}e_{r+2} + ... + \lambda_{2,m-r}e_m) +$$

$$\cdots \quad +$$

$$\beta_r(e_r + \lambda_{r,1}e_{r+1} + \lambda_{r,2}e_{r+2} + ... + \lambda_{r,m-r}e_m) =$$

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j e_j + \sum_{j=r+1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r} \beta_k \lambda_{k,j-r} \right) e_j,$$

como $\{e_1, .., e_m\}$ son independientes (son una base de $\mathbb{R}^m$), se sigue que

$$\beta_1 = ... = \beta_r = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \lambda_{k,1} = ... = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \lambda_{k,m-r} = 0.$$

Lo que prueba que los vectores $\{b_1, ..., b_r\}$ son linealmente independientes $\square$

Observación 1. *Dada una matriz $A \in M_{n\times m}$ tenemos dos definiciones de rango de la matriz.*

A) *Número de filas no nulas de su forma normal de Hermite.*

B) *$Rang A = dim L[F_1, ..., F_n]$, donde escribimos la matriz por filas $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. O equivalentemente por columnas.*

Ambas definiciones son equivalentes.

Demostración: La forma normal de Hermite la conseguiamos transformando las filas de la matriz con las operaciones de:

- Intercambiar filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar.

En la lección anterior vimos que las operaciones anteriores no cambian el rango de un conjunto de vectores, en este caso de los vectores fila de una matriz. Por otro lado la forma normal de Hermite es del tipo

$$H = \begin{pmatrix} 1_{1,1} & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & 1_{k,k} & & \\ 0 & 0 & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Las k filas no nulas, al estar eacalonadas, son linealmente independientes. Luego el rango por filas coincide con el número de filas no nulas de la forma normal de Hermite $\square$

El concepto de rango de una matriz tiene una aplicación importante en la caracterización de los sistemas lineales compatibles.

Teorema 2. ***(de Rouche-Fröbenius)****. Se considera un sistema de n ecuaciones y m incógnitas:*

$$Ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde $A \in M_{n\times m}$. Si escribimos la matriz A como columnas $A = (C_1\, C_2 \, ...C_m)$, se considera la matriz ampliada

$$(A|b) = (C_1\, C_2\, ...C_m b) \in M_{n\times(m+1)},$$

entonces el sistema es ***Compatible****, es decir tiene solución, si y solo si*

$$RangA = Rang(A|b).$$

Demostración: Observamos que nuesto sistema se puede escribir como

$$Ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_mC_m = b,$$

es decir buscamos coeficientes $x_1, x_2, ..x_m$ para que el vector $b \in \mathbb{R}^n$ se combinación lineal de los vectores $C_1, C_2, ..., C_m \in \mathbb{R}^n$. Observemos que siempre $RangA \leq Rang(A|b)$.

Si $Rang(A|b) > RangA$ esto quiere decir que b es linealmente independiente de los $C_1, ..., C_m$ y por tanto el sistema no tiene solución.

Por otro lado, si $Rang(A|b) = RangA$, ocurre que

$$dimL[C_1, ..., C_m] = dim[C_1, ..., C_m, b]$$

y por tanto

$$L[C_1, ..., C_m] = [C_1, ..., C_m, b],$$

luego b se puede escribir como combinación lineal de los generadores de $L[C_1, ..., C_m]$, es decir existen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$b = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + ... + \lambda_m C_m.$$

Así el sistema tiene al menos una solución $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`