

ÁLGEBRA LINEAL.

Aplicación del Teorema de la Base: Subespacio Vectorial Complementario.

Definición 1. Consideramos $L \subset V$ un subespacio vectorial L de un espacio vectorial V finitamente generado. Se llama **Subespacio Complementario** a L a otro subespacio $W \subset V$ de modo que

$$L \cap W = \{0\} \quad y \quad L + W = V.$$

Aunque el subespacio complementario a uno dado no tiene por que ser único, al menos siempre existe uno.

Proposición 1. Si V es un espacio vectorial finitamente generado y $L \subset V$ siempre existe un subespacio W complementario a L .

Demostración: Como V es un espacio finitamente generado existe una base de él $\{v_1, \dots, v_n\}$ y así

$$V = [v_1, \dots, v_n].$$

También el subespacio L tiene una base y podemos escribirlo como

$$L = [u_1, \dots, u_r],$$

con $r \leq n$. Podemos escribir

$$V = [u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_n].$$

y como el rango de $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_n\}$, podemos encontrar

$$u_1, \dots, u_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-r}}$$

linealmente independientes. Consideramos

$$W = [v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-r}}].$$

Veamos que el subespacio vectorial W es complementario a L .

Como $u_1, \dots, u_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-r}}$ son linealmente independientes se tiene que

$$[u_1, \dots, u_r] \cap [v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-r}}] = \{0\}.$$

Si no fuese a sí, existiría $v \in V$ no nulo tal que

$$v = \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k = \sum_{j=1}^{m-r} \eta_j v_{i_j}$$

donde no todos los " λ " y " η " son nulos. Así

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k u_k - \sum_{j=1}^{m-r} \eta_j v_{i_j} = 0,$$

y llegamos a contradicción con la independencia de los vectores.

Además n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n forman una base. Así

$$L + W = [u_1, \dots, u_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-r}}] = V \quad \square$$

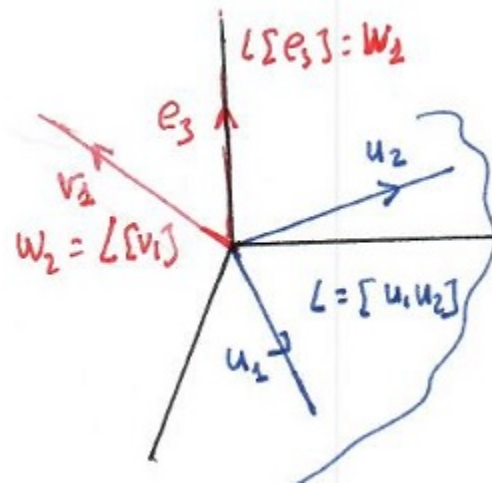


FIGURA 1. W_1 y W_2 complementarios a L .

Ejemplo 1. Sea $L = L[(1, 0, 1, 0), (2, 2, 1, 0)] \subset \mathbb{R}^4$. queremos encontrar un subespacio complementario.

Demostración: Como $\mathbb{R}^4 = [e_1, e_2, e_3, e_4]$, donde hemos usado la base canónica, es fácil ver que

$$\mathbb{R}^4 = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (2, 2, 1, 0)]$$

y por tanto

$$W = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$$

es un subespacio complementario de L \square

El siguiente resultado será útil para medir el tamaño de las soluciones de un sistemas de ecuaciones lineales.

Proposición 2. Sean $L, W \subset V$ dos subespacio vectoriales de un espacio vectorial V finitamente generado. Entonces

$$\dim(L + W) = \dim L + \dim W - \dim(L \cap W).$$

Demostración: $L \cap W$ es un subespacio vectorial de V , que tendrá una base

$$L \cap W = [u_1, u_2, \dots, u_r].$$

Así la dimensión de $L \cap W$ es r

Estos vectores también están en L , y con ellos podemos completar una base de L , es decir

$$L = [u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s].$$

La dimensión de L es $r + s$.

De la misma forma podemos completar una base de W de forma que

$$W = [u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t]$$

La dimensión de W es $r + t$.

Si $v \in L + W$, existe $u \in L$ y $w \in W$ de modo que

$$\begin{aligned} v = u + w &= \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k u_k + \sum_{i=1}^s a_i v_i \right) + \left(\sum_{k=1}^r \eta_k u_k + \sum_{j=1}^t b_j w_j \right) = \\ &= \sum_{k=1}^r (\lambda_k + \eta_k) u_k + \sum_{i=1}^s a_i v_i + \sum_{j=1}^t b_j w_j. \end{aligned}$$

Todo elemento v de $L + W$ se puede poner como combinación lineal de $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t$, luego

$$\dim(L + W) \leq r + s + t = \dim L + \dim W - \dim(L \cap W).$$

Por otro lado como $L \cap [w_1, \dots, w_t] = \{0\}$, si no existiría $w \in [w_1, \dots, w_t] \subset W$ no nulo, con $w \in L \cap W$, pero eso no es posible pues los vectores

$$u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t$$

son linealmente independientes. Por lo tanto los vectores

$$u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t$$

son linealmente independientes y todos son vectores de $L + W$, así

$$\dim(L + W) = \dim L + \dim W - \dim(L \cap W) \quad \square$$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`