ÁLGEBRA LINEAL.

Coordenadas de un Vector.

En $\mathbb{R}^2$, el plano, los puntos o vectores de $\mathbb{R}^2$ los hemos representado con dos **coordenadas** (**Cartesianas**):

$$P \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow P = (x, y)$$

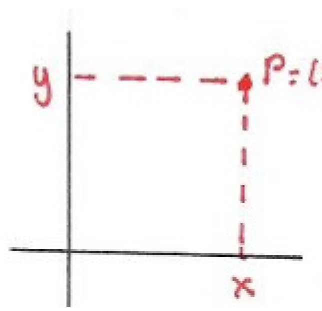

FIGURA 1. Coordenadas Cartesianas.

En $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$ hablamos de tres o n coordenadas de un punto ovectro. en un espacio vectorial general V finitamente generado se tiene el concepto de **coordenadas** referidas a una base.

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Dada una base $\{v_i, v_2, ..., v_n\}$ de V, se llaman* ***coordenadas*** *de un vector $v \in V$* ***respecto de la base*** *anterior a los números $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ que verifican que:*

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Observación 1. *Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.*

Demostración: Claro, si

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \eta_k v_k,$$

entonces

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \eta_k) v_k.$$

como los vectores v_k son independiente, se sigue que

$$\lambda_k - \eta_k = 0 \qquad \text{para todo} \qquad K = 1, 2, ..., n.$$

Así

$$\lambda_k = \eta_k \qquad \text{para todo} \qquad K = 1, 2, ..., n \qquad \square$$

Observación 2. *Fijada una base $\{v_1, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{K}$ otro cuerpo cualquiera), podemos definir*

$$V = [v_1, ..., v_n] = \{ \ v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \ : \ \lambda_k \in \mathbb{R}, \ k = 1, ..., n \ \} =$$

$$\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \ : \ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \}.$$

Por tanto si $dim V = n$, podemos ver V como $\mathbb{R}^n$. Es obvio que existe una aplicación biyectiva que relaciona V con $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{cccccc} T & : & V & \rightarrow & \mathbb{R}^n & \\ & & v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k & \rightarrow & T(v) & = & (\lambda_1, ..., \lambda_n). \end{array}$$

Es más, veremos que la aplicación T es una **aplicación lineal** . Lo que quiere decir que T conserva las operaciones de V y las de $\mathbb{R}^n$.

Cambios de Base.

Las coordenadas de un vector respecto de una base cambian al referirlas a otra base.

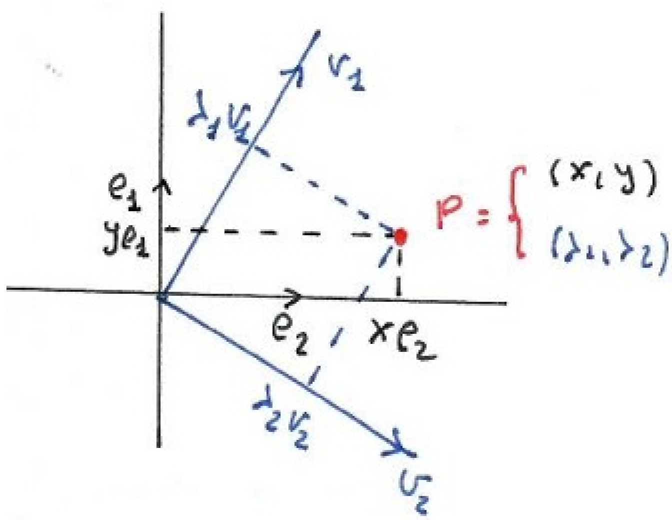

FIGURA 2. Cambio de Coordenadas.

Ejemplo 1. *En $\mathbb{R}^2$ tenemos la base canónica:*

$$\{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}.$$

Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, sus coordenadas respecto de la base canónica son precisamente x e y,

$$P = xe_1 + ye_2.$$

¿Que coordenada tendrá respecto de la base $\{v_1, v_2\} = \{(1,1), (1,-1)\}$?

Demostración: Necesitamos que

$$(x, y) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v(1,1) + \lambda_2(1,-1).$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} x & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ y & = & \lambda_1 - \lambda_2 \end{array},$$

resolviendo el sistema,

$$\lambda_1 = \frac{x+y}{2} \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \frac{x-y}{2},$$

que son la nuevas coordenadas de V respecto de la base $\{v_1, v_2\} = \{(1,1), (1,-1)\}$ $\square$

Ejemplo 2. *Sean $u_1 = (1,2,3), u_2 = (-2,1,0)$ y $u_3 = (1,-1,0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Hay que ver que forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector (2,0,0) respecto de esa base.*

Demostración: Es suficiente con ver que los tres vectores u_k son linealmente independientes. Claramente u_1 y u_2 lo son ya que el último tienen una coordenada nula , la tercera, que no lo es en el primero.

Si escribimos

$$u_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2,$$

necesariamente $k_1 = 0$ y así el sistema

$$\begin{array}{ccccc} k_1 & - & 2k_2 & = & 1 \\ 2k_1 & + & k_2 & = & -1 \end{array}$$

es incompatible. De lo que se sigue que u_3 no depende linealmente de u_1 y u_2.

Ahora para encontrar las coordenadas del vector $(2, 0, 0)$ en la nueva base, ponemos

$$(2, 0, 0) = au_1 + bu_2 + cu_3$$

equivalente al sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & 2b & + & c & = & 2 \\ 2a & + & b & - & c & = & 0 \\ 3a & & & & & = & 0 \end{array},$$

cuya solución es $a = 0$, $b = c$ y $b = -2$.

$$(2, 0, 0) = -2u_2 - 2u_3 \qquad \square$$

Existe un procedimiento para pasar de las coordenadas referidas a una base a las coordenadas referidas a otra.

Proposición 1. *(**Cambio de Coordenadas**) Sean $B = \{ v_1, ..., v_n\}$ y $B' = \{ u_1, ..., u_n\}$ dos bases de un espacio vectorial V de dimensión n. Se consideran las coordenadas de los vectores v_j respecto de la base B'*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i \qquad \textit{para} \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Se considera la matriz

$$A = (a_{i,j}) \in M_{n\times n}$$

donde la columna j-ésima de la matriz son las coordenadas del vector v_j respecto de la base B'. Entonces

A) *La matriz A tiene rango igual a n.*

B) *Si* $v \in V$ *se escribe como*

$$v = \sum_{i=j}^{n} \lambda_j v_j \qquad \textit{y como} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i,$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

C) *Y también*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

Demostración: A) Las columnas de la matriz A no son más que los vectores v_j, $j = 1, 2, ..., n$, en coordenadas respecto de la base B'. Como estos vectores v_j son linealmente independientes por formar una base de V, se sigue que su rango es n. Por tanto el rango por columnas de A es n. Por el Teorema del rango, el rango de la matriz es n.

B) Ponemos

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i \right) =$$

aplicando la propiedad conmutativa

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} \right) u_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i.$$

La última igualdad se tiene ya que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas. Luego

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Lo que prueba que

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

C) Por último, como el rango de la matriz A es n, el método de Gauss-Jordan nos lleva a la existencia de la matriz inversa A^{-1}. Por tanto multiplicando por A^{-1} la identidad anterior $(*)$ llegamos a que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \qquad \square$$

Ejemplo 3. *Se consideran las base* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *y* $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ *de un espacio vectorial* V *de diemsión* 3. *Se sabe que*

$$u_1 = v_1 + v_2, \qquad u_2 = v_2 + v_3 \qquad y \qquad u_3 = v_1 + v_3.$$

Veamos como son las matrices que nos transforman coordenadas respecto de B *a coordenadas respecto de* B' *y viceversa.*

Demostración: Sea la matriz de columnas los vectores u_k respecto de la base B'

$$A = (u_1 u_2 u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $u = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k u_k$, entonces las coordenadas de u respecto de la base B' serán (η_1, η_2, η_3) con

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Para hacer el cambio inverso de coordenadas, podemos calculara A^{-1} usando Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

y tendremos que

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Otra forma de proceder es despejar de las ecuaciones de arriba las v_k en función de las u_j.

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 + v_2 \\ u_2 & = & v_2 + v_3 \\ u_3 & = & v_1 + v_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 + v_2 \\ u_2 & = & v_2 + v_3 \\ u_3 - u_1 & = & -v_2 + v_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 + v_2 \\ u_2 & = & v_2 + v_3 \\ u_2 + u_3 - u_1 & = & 2v_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 + v_2 \\ u_2 & = & v_2 - 1/2u_1 + 1/2u_2 + 1/2u_3 \\ -1/2u_1 + 1/2u_2 + 1/2u_3 & = & v_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 + 1/2u_1 + 1/2u_2 - 1/2u_3 \\ 1/2u_1 + 1/2u_2 - 1/2u_3 & = & v_2 \\ -1/2u_1 + 1/2u_2 + 1/2u_3 & = & v_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} 1/2u_1 - 1/2u_2 + 1/2u_3 & = & v_1 \\ 1/2u_1 + 1/2u_2 - 1/2u_3 & = & v_2 \\ -1/2u_1 + 1/2u_2 + 1/2u_3 & = & v_3 \end{array}$$

y así

$$A^{-1} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Algunos problemas son más fáciles de resolver en una bases que en otras. El cambio de base nos será muy útil cuando hagamos potencias de matrices con un exponente alto.

Observación 3. *En el tema siguiente veremos que un cambio de variable se puede ver como un* ***automorfismo*** *de un espacio vectorial (o lo que es lo mismo una aplicación lineal biyectiva de un espacio vectorial en si mismo).*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`