ÁLGEBRA LINEAL

Matrices.

Dado un sistema $\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}$, son los **coeficientes** de las incógnitas

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m}, \end{array}$$

así como los **términos independientes** $\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}$ los números que tenemos que manipular para resolver el sistema.

Ejemplo 1. *Queremos resolver el sistema*

$$\begin{array}{rcll} x+y+z & = & 1 & \quad E_1 \\ x-y-z & = & 0 & \quad E_2 \\ y-2z & = & 3. & \quad E_3 \end{array}$$

Demostración: Aplicandoel Método de Gauss

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right. \quad \underset{E_2-E_1}{\Leftrightarrow} \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right. \quad \underset{E_3-E_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right. .$$

Ahora despejando, llegamos a la solución:

$$y = 4/3; \qquad -2(4/3) - 2z = -1 \text{ así } z = 1/2(1-8/3) = -\frac{5}{6}$$

$$\text{y } \; x = 1 - \frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \qquad \square$$

Toda la información de los sistemas lineales está contenida en sus coeficientes. Hay una notación especial para tratar solo con ellos: **la**

notación matricial. Así llamamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

matriz $n \times m$. A $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ matriz $n \times 1$. Y a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ matriz $m \times 1$. Después de ver como se manipulan (se operan) con estos objetos, podremos escribir los sistemas lineales de forma abreviada como:

$$Ax = b$$

¡como una ecuación de primer grado ! A la vista de lo anterior, cabe preguntarse si los sistemas lineales admitirán una solución del tipo

$$x = A^{-1}b$$

sea lo que sea A^{-1}. Para que las dos fórmulas anteriores tengan seentido tenemos que estudiar los conjuntos de matrices.

Matrices. Conjunto de Matrices.

Definición 1. *Si $n, m \in \mathbb{N}$ se llama **matriz** $n \times m$ a toda colección de números (reales, complejos u otros) ordenados en n **filas** y m **columnas***

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m}, \end{pmatrix} = A$$

*que notamos con una letra mayúscula (en este caso A); donde $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ suele ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ o cualquier otro cuerpo) es la **entrada** de la matriz correspondiente a la fila i ($i = 1, 2, ..., n$) y la columna j ($j = 1, 2, ..., m$).*

En una matriz A $n \times m$ tenemos n filas, cada una de ellas tiene m entradas; y tenemos m columnas cada una de ellas con n entradas.

Ejemplo 2. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Demostración: La matriz A es una matriz 3×4 de tres filas y 4 columnas.

- La fila segunda es $F_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$, que podemos ver como una matriz 1×4 (o vector fila de cuatro componentes como veremos más adelante).

- La columna tercera es $C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ que podemos ver como una matriz 3×1 (o vector columna de tres componentes, como veremos más adelante.
- La entrada $a_{2,4}$ de la matriz, la entrada en la fila 2 y en la columna 4, es $a_{2,4} = 1$.

Observación 1. *Dada una matriz* $n \times m$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m}, \end{pmatrix}$, *cada fila*

$$F_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

la podemos ver como un vector de $\mathbb{K}^m$ *(usualmente* $\mathbb{R}^m$*.*

Cada columna

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \qquad j = 1, 2, ..., m$$

la podemos ver como un vector de $\mathbb{K}^n$ *(usualmente* $\mathbb{R}^n$*.*

Observación 2. *En general, en particular en Informática, una matriz la podemos ver como un deposito de información (**estructura de datos**) de capacidad* $n \times m$*, donde en cada posición* $a_{i,j}$ *podemos guardar un número (nuestro caso), una palabra, fecha, archivo...etc*

Ejemplo 3. *Asiento comtable:*

$$\begin{pmatrix} \textit{Fecha} & \textit{Hora} & \textit{Artículo} & \textit{Tienda} & \textit{Precio} & \textit{I.V.A.} \\ 8 - III - 21 & 10:30 & 27 & 3 & 84 & 12,38 \end{pmatrix}$$

matriz (o array) 1×6

Ejemplo 4. *Notas:*

$$\begin{pmatrix} \textit{Alumno} & \textit{Prácticas} & \textit{Examen 1.} & \textit{Examen 2.} & \textit{N. Final} \\ \textit{Alumno 1.} & 3,5 & 4 & 6 & 5 \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \textit{Alumno n.} & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matriz $\quad$ *n*^{o} *alumnos de la clase* $\times 5$.

Definición 2. *Llamamos* $M_{n \times m}(\mathbb{K})$ *al conjunto de todas las matrices* $n \times m$ *cuyas entradas* $a_{i,j}$ *son elementos de* $\mathbb{K}$*, donde* $\mathbb{K}$ *puede ser un conjunto muy variado (en nuestro caso, pondremos usualmente* $\mathbb{R}$*).*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`