ÁLGEBRA LINEAL

Producto de Matrices.

La operación más importante con matrices es la **Multiplicación de Matrices**. Tiene una restricción en cuanto al tamaño de las matrices a multiplicar (algo que no ocurre con la suma).

Definición 1. A) *Sean* $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *y* $B \in M_{m\times \tilde{n}}(\mathbb{R})$, *con* $A = (a_{i,j})$ *y* $(B_{j,k})$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ *y* $k = 1, ..., \tilde{n}$. *Se define el producto de* A *por* B *(y en este orden) como la matriz*

$$AB = (a_{i,j})(b_{j,k}) = (c_{i,k}),$$

donde

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} \qquad \text{para} \quad i = 1, ..., n \quad \text{y} \quad k = 1, ..., \tilde{n}$$

es decir, $c_{i,k}$ *es el producto escalar de la fila* i*-ésima de la matriz* A *por la columna* k*-ésima de la matriz* B

$$c_{i,k} =< F_{A,i}, C_{B,k} >=< (a_{i,1}, ..., a_{i,m}), (b_{1,k}, ..., b_{m,k}) > .$$

B) *Se llaman* ***matrices cuadradas*** *aquellas que tienen el mismo número de filas y de columnas.* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es un conjunto de matrices cuadradas de orden* n *(es decir matrices de* n *filas y* n *columnas.*

C) *Si* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *con con* $A = (a_{i,j})$ *y* $(B_{i,j})$, *entonces*

$$AB = (c_{i,j}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}) \qquad \text{para} \quad i = 1, ..., n \quad \text{y} \quad j = 1, ..., n.$$

Ejemplo 1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} =$

Demostración:

$$\begin{pmatrix} < F_1, C_1 > & < F_1, C_2 > & < F_1, C_3 > & < F_1, C_4 > \\ < F_2, C_1 > & < F_2, C_2 > & < F_2, C_3 > & < F_2, C_4 > \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 7 + 2\cdot 1 + 1\cdot 8 & 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 & 3\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 7 + 1\cdot 1 + 1\cdot 8 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 31 & 6 & 6 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad \square$$

Ejemplo 2. *Dadas dos matices $A, B \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide calcular la entrada $c_{2,3}$ de AB y de BA.*

Demostración: $AB = (c_{i,j}) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así $c_{2,3} = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 6$.

Por otro lado $BA = (c_{i,j}) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

así $c_{2,3} = 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 2$ $\square$

Observación 1. *El ejemplo anterior prueba que en general el **producto de matrices no es conmutativo**. En decir, en general **no es cierto** que AB es igual a BA*

Observación 2. ***Forma matricial de un sistema de cuaciones lineales:***

Demostración: Dado un sistema de n ecuaciones lineales y m incógnitas:

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,j}x_j + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,j}x_j + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + ... + a_{i,j}x_j + ... + a_{i,m}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,j}x_j + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n, \end{array} \right. .$$

Si llamamos A a la matriz $n \times m$ de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & a_{n,m} \end{pmatrix},$$

llamamos $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ la matriz columna $m \times 1$ de incógnitas y llamamos $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matriz columna $n \times 1$ de términos independientes, entonces el sistema de arriba $(*)$, se puede escribir de forma abreviada por:

$$Ax = b$$

donde Ax se entiende como un producto de matrices $\square$

¿Se podrá resolver un sistema como el de antes poniendo

$$x = A^{-1}b \qquad ?$$

La respuesta depende de las propiedaes del producto de las matrices, aunque no siempre debemos esperar respuesta positiva. Si el sistema $(*)$ es incompatible o compatible indeterminado no podemos esperar una solución única del tipo $A^{-1}b$, que al ser el producto de dos matrices concretas, es por tanto un único vector solución de la ecuación.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`