# ÁLGEBRA LINEAL

## Cálculo de la Matriz Inversa. Método de Gauss-Jordan.

Dada una matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$. Podemos multiplicarla (por la izquierda) usando las matrices que dan las **transformaciones elementales**, es decir: intercambiando filas, multiplicar una fila por un escalar o sumar a una fila otra previamente multiplicada por un escalar; con el objetivo de transformar $A$ en la matriz identidad (algo parecido al Método de Eliminación de Gauss). Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.** *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3$. *Vamos a someter a la matriz $A$ a transformaciones elementales hasta convertirla en la matriz identidad (si es posible).*

***Demostración:*** Escribimos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y cada transformación que hagamos en la matriz $A$ la vamos a repetir en la matriz que hay a su derecha, empezando por la identidad. Multiplicamos la primera fila por $1/2$, es decir hacemos $\frac{1}{2}F_1$, y así

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ahora hacemos $F_2 + F_1$ y $F_3 - F_1$ y tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ahora de forma consecutiva hacemos $\frac{1}{2}F_2$ y $F_3 + F_2$ y llegamos a que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1 \end{array}\right).$$

Como nos sale una fila de ceros ya no es posible llegar a la matriz identidad (como veremos un poco más adelante el **rango** de $A$ es $2 < 3$ y en estas condiciones no puede existir la inversa). La matriz $A$ en este caso **no es invertible** $\square$

**Ejemplo 2.** *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4$. *Vamos a someter a la matriz $A$ a transformaciones elementales hasta convertirla en la matriz identidad (si es posible).*

***Demostración:*** Escribimos:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La primera columna de $A$ coincide con la de la matriz $I$ identidad, luego nos fijamos en la segunda columna. Hacemos $F_4 - F_2$ y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ahora, sumando a la cuarta fila la tercera ($F_4 + F_3$)tenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ya hemos conseguido que debajo de las diagonal solo haya ceros. Tenemos que eliminar las entradas por encima de la diagonal. Así, si restamos a la primera fila la cuerta y a la segunda fila la tercera ( $F_1 - F_4$ y $F_2 - F_3$ ), tenmos que

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A la derecha queda las transformaciones a las que hemos sometido a la identidad $I$, que es la inversa de $A$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lo comprobamos:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

¿Por qué de esta manera nos sale la inversa? Ya lo argumentamos anterioremente. Si $A \in M_n$ es una matriz cuadrada y $B_1, B_2, ..., B_m$ son matrices con inversa tales que

$$B_m B_{m-1} ... B_2 B_1 A = I,$$

entonces

$$A^{-1} = B_m B_{m-1} ... B_2 B_1 = B_m B_{m-1} ... B_2 B_1 I \qquad (*)$$

Las transformaciones a las que sometemos a las matrices son elementales, que vienen dadas por matrices regulares o inversibles como vimos. De ahí que al hacerle esas mismas transformaciones a la matriz identidad ($(*)$) nos dé la matriz inversa.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

*Email address*: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`