ÁLGEBRA LINEAL

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Un **Sistema Lineal** de n **Ecuaciones** y m **Incógnitas** es un conjunto de n ecuaciones de la forma

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,j}x_j + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,j}x_j + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + ... + a_{i,j}x_j + ... + a_{i,m}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,j}x_j + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n, \end{array} \right.$$

donde los números $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$, son conocidos, como los números $b_i \in \mathbb{R}$. En cambio los números $x_1, x_2, ..., x_m$ son desconocidos o **incógnitas**.

Definición 1. *LLamaremos solución del Sistema* $(*)$ *a toda colección de* m *números* $x_1, x_2, ..., x_m$ *de forma que verifiquen las* n *ecuaciones del sistema* $(*)$.

Ejemplos 1. **a:** *Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con solución única.*

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 5 \\ x - y & = & 0 \end{array}$$

b: *Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sin solución.*

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 5 \\ 6x + 4y & = & 0 \end{array}$$

c): *Ecuación con dos incógnitas con infinitas soluciones.*

$$3x + 2y \;=\; 5$$

Demostración:

a: Observemos que $x = y$ y por tanto la primera ecuación queda $5x = 5$. Por tanto $x = 1$ e $y = 1$ es la única solución del sistema.

b: La segunda ecuación se puede escribir como $2(3x + 2y) = 0$, pero de la primera ecuación $2 \times 5 = 0$. Lo cuál no es posible. No exiten dos números x e y que hagan ciertas las dos igualdades. Por tanto el sistema no tiene solución.

c: Despejando, $y = \frac{5-3x}{2}$, y así tendremos que para cada valor de $x \in \mathbb{R}$ tendremos otro valor de y que verifica la ecuación. Las soluciones son tantas como números reales $\square$

Definición 2. *Sea un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas:*

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n. \end{array} \right.$$

Sea S el conjunto de todas las soluciones del sistema $(*)$; S se puede ver como un subconjunto de $\mathbb{R}^m$:

$$S = \{\ (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \quad : \quad x_1, x_2, ..., x_m \quad \textit{solución de} \quad (*) \quad \}.$$

A: *Si $S = \emptyset$ se dice que el sistema es* ***Incompatible*** *o que no tiene solución.*

B: *Si $\neq \emptyset$ se dice que el sistema es* ***Compatible*** *o que tiene solución.*

B_1**:** *Si S es un único elemento de $\mathbb{R}^m$ se dice que el sistema es* ***compatible determinado****.*

B_2**:** *Si S esta formado por más de un elemento de $\mathbb{R}^m$ se dice que el sistema es* ***compatible indeterminado****.*

Observemos que en los ejemplos anteriores, **a)** es un sistema compatible determinado, **b)** un sistema incompatible y **c)** un sistema compatible indeterminado.

Definición 3. *Un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas:*

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & 0. \end{array} \right.$$

donde todos los números $b_i = 0$ son nulos se llama ***sistema lineal homogéneo****.*

Proposición 1. *Sea un sistema homogéneo*

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & 0, \end{array} \right.$$

y sea S el conjunto de sus soluciones. Entonces

- $0 = (0, 0, ..., 0) \in S$.
- *Si $x = (x_1, x_2, ...x_m), y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in S$, entonces $x + y \in S$.*
- *Si $x \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda x \in S$*

Demostración: Es trivial, solo hay que hacer las cuentas □

En su momento diremos que el conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ de las soluciones de un sistema lineal homogéneo es un **subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^m$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`