

ÁLGEBRA LINEAL.

Compatibilidad de Sistemas. El Teorema de Rouché-Fröbenius.

Consideramos un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\&\vdots \\a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n\end{aligned}$$

o de forma matricial

$$Ax = b.$$

O también

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si existe alguna solución del sistema, concluimos que el vector $b \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores columnas de la matriz de coeficientes A . Si llamamos **matriz ampliada** a

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & b_n \end{pmatrix},$$

por definición de rango de una matriz y por el Teorema del Rango se tiene que

$$\text{Rang} A = \text{Rang}(A|b).$$

Definición 1. Sea $Ax = b$ un sistema lineal con $A = (a_{i,j}) \in M_{n \times m}$ (n ecuaciones y m incógnitas). Se llama **Matriz Ampliada** a la matriz

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & b_n \end{pmatrix} \in M_{n \times (m+1)}.$$

Teorema 1. (de Rouché-Fröbenius). Un sistema lineal $Ax = b$, con $A \in M_{n \times m}$, es **compatible** si y solo si

$$\text{Rang}A = \text{Rang}(A|b).$$

Demostración: Si $Ax = b$ **no es compatible**, no existe $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $Ax = b$. Así b es linealmente independiente de los vectores columna de la matriz A , luego

$$\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}A + 1.$$

Si $Ax = b$ es **compatible** ya hemos visto que

$$\text{Rang}A = \text{Rang}(A|b) \quad \square$$

Observación 1. Un sistema lineal **homogéneo** $Ax = 0$ siempre es **compatible** ya que

$$\text{Rang}A = \text{Rang}(A|0).$$

Ejemplo 1. Dado el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= a \\ ay + bz &= b \\ az + bt &= a^2 \\ bx + at &= b^2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^2 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

lo vamos a discutir dependiendo de los valores de a y b .

Demostración: El determinante de la matriz A es

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a^4 - b^4.$$

Observemos además que el menor

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3.$$

$a^4 - b^4 \neq 0$ En este caso, la matriz A tiene rango máximo. Como el sistema es cuadrado, el sistema es **compatible de solución única**. Usando la regla de Cramer (es lo más sencillo en este caso)

$$x = \frac{1}{a^4 - b^4} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ a^2 & 0 & a & b \\ b^2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \frac{1}{a^4 - b^4} \left[-b^2 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ a^2 & 0 & a \end{vmatrix} \right] =$$

$$\frac{1}{a^4 - b^4} [-b^5 + a^4 + b^2 a^2 - b^2 a]; \dots\dots\dots \text{etc}$$

$a = b = 0$ En este caso no hay sistema. Todo $x \in \mathbb{R}^4$ es solución.

$a = \pm b \neq 0$ En este caso tenemos las siguientes posibilidades.

$a = b$ Consideramos el menor de orden 4 de la matriz ampliada $(A|b)$

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a & a & 0 & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ a & 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a & a & a \\ 0 & a & a^2 \end{vmatrix} = a^5 - a^5 = 0.$$

Luego el $\text{Rang} A = \text{Rang}(A|b)$ y el sistema es **compatible indeterminado**. Tenemos que

$$\begin{aligned} ax + ay &= a \\ ay + az &= a \\ az &= a^2 - at \\ t &= t \end{aligned}$$

y usando la regla de Cramer

$$x = \frac{1}{a^3} \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a & a & a \\ a^2 - at & 0 & a \end{vmatrix} = \frac{1}{a^3} [a^3 + a^2(a^2 - at) - a^3] = \frac{a^2 - at}{a} = a - t; \dots\dots\dots \text{etc}$$

$a = -b$ Consideramos el menor de orden 4 de la matriz ampliada $(A|b)$

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a & -a & 0 & a \\ 0 & a & -a & -a \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ -a & 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$a \begin{vmatrix} a & -a & -a \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & -a & -a \\ 0 & a & a^2 \end{vmatrix} = a^5 + a(a^4) = 2a^5 \neq 0.$$

Luego el sistema es **incompatible** $\square$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es