ÁLGEBRA LINEAL.

Sistemas Compatibles indeterminados. Caso no Homogéneo.

Consideramos un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas **no homogéneo**:

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}$$

o de forma matricial

$$Ax = b.$$

O también, viendo $A = (C_1 \; C_2 \; ..., C_m)$ como vectores columnas,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} x_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Vamos a suponer que $n \leq m$ (aunque no es necesario) y que

$$Rang A = Rang(A \,|\, b),$$

es decir que el sistema es compatible.

Proposición 1. *Sea $Ax = b$, con $A \in M_{n\times m}$ y $Rang A = Rang(A \,|\, b)$.*

a) *El sistema tiene solución única si y solo si*

$$Rang A = m.$$

b) *El sistema tiene tiene solución indeterminada si y solo si*

$$Rang A < m.$$

Demostración: **a)** Si $Rang A = m$, (y $n \leq m$), por el Terorema de rango, $n = m$, la matriz A es cuadrada de rango máximo, luego tiene inversa. Así

$$x = A^{-1}b,$$

tenemos una solución única.

Si tenemos una solución única, por $(*)$, vemos que el vector b se escribe de una única forma como combinación lineal de las columnas de A luego estas tienen que ser independientes y así

$$m = RangoA.$$

b) Si el sistema tiene solución inderteminada, por el apartado anterior $RangA < m$.

Ahora si $RangA = r < m$, entonces tiene que existir (por definición de rango) $F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_r}$ filas, en la matriz, linealmente independientes y por tanto un menor de orden r

$$\left| D \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & ... & i_r \\ j_1 & j_2 & ... & j_r \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Reescribimos el sistema como

$$\begin{array}{rcl} a_{i_1,j_1}x_{j_1} + ... + a_{i_1,j_r}x_{j_r} & = & b_1 - \sum_{j\neq j_1,...,j_r} a_{i_1,j}x_j \\ a_{i_2,j_1}x_{j_1} + ... + a_{i_2,j_r}x_{j_r} & = & b_2 - \sum_{j\neq j_1,...,j_r} a_{i_2,j}x_j \\ \vdots & & \\ a_{i_r,j_1}x_{j_1} + ... + a_{i_r,j_r}x_{j_r} & = & b_n - \sum_{j\neq j_1,...,j_r} a_{i_r,j}x_j. \end{array}$$

Este es un sistema cuadrado, de r ecuaciones y $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ r incógnitas, que tiene solución única. Claro, en función de los parámetros x_j con $j \neq j-1, j_2, ..., j_r$. Es decir

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_r} \end{pmatrix} = \left(D \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & ... & i_r \\ j_1 & j_2 & ... & j_r \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 - \sum_{j\neq j_1,...,j_r} a_{i_1,j}x_j \\ b_2 - \sum_{j\neq j_1,...,j_r} a_{i_2,j}x_j \\ \vdots \\ b_n - \sum_{j\neq j_1,...,j_r} a_{i_r,j}x_j \end{pmatrix}.$$

Las soluciones son múltiples y dependen de los $m - r$ parámetros x_j con $j \neq j-1, j_2, ..., j_r$ $\square$

Proposición 2. *Sea $Ax = b$, con $A \in M_{n\times m}$ y $RangA = Rang(A\,|\,b)$. Consideramos los conjuntos S de soluciones del sistema homogéneo asociado ($Ax = 0$) y el conjunto S' el conjunto de soluciones del sistema. Ahora S' se puede escribir como*

$$S' = \{(y_1, ..., y_n)\} + S =$$

$$\{\,(y_1, ..., y_n) + x \in \mathbb{R}^m \;:\; x \in S\,\},$$

*donde $(y_1, ..., y_n) \in S'$ es una **solución particular** del sistema. Además, podemos decir de S' que es un espacio afín de dimensión $m - RangA$.*

Demostración: Claro, si $y = (y_1, ..., y_n) \in S'$ y $x \in S$, entonces

$$A(y + x) = Ay + Ax = b + 0 = b.$$

Así $y + x \in S'$.

Por otro lado, si $y' \in S'$, se tiene que $y' = y + (y' - y$ y claro $y - y' \in S$ ya que

$$A(y' - y) = Ay' - Ay = b - b = 0.$$

Luego hemos visto que S' es un espacio afín, cuyo espacio vectorial soporte es S. Como la dimensión de S es

$$dimS = m - RangA,$$

visto en la lección anterior, así esta misma dimensión es la del espacio afín S' $\square$

Observación 1. *En la primera Proposición hemos visto que si* $RangA = r \leq m$*, entonces* r *variables quedan en función de las otras* $m - r = m - RangA$*. Esto es lo mismo que decir que*

$$dimS' = m - RangA.$$

Ejemplo 1. *Se considera el sistema*

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 5y & + & 2z & + & 4t & = & 2 \\ x & - & 4y & + & z & + & 3t & = & 5 \\ 5x & + & y & - & 4z & - & t & = & 3. \end{array}$$

Demostración: Vimos en la lección anterior que

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 42$$

Como el número de incógnitas es 4 y el rango de la matriz de coeficientes es 3 (la matriz ampliada no puede tener mayor rango), estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Las soluciones del sistema S' viene dadas en ecuaciones implícitas por

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 5y & + & 2z & = & 2 - 4t \\ x & - & 4y & + & z & = & 5 - 3t \\ 5x & + & y & - & 4z & = & 3 + t. \end{array}$$

Para $t = 0$, el sistema anterior se puede resolver, usando la regla de Cramer por ejemplo, y

$$x = \frac{1}{42}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -51/42; \quad y = \frac{1}{42}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -95/42;$$

y

$$z = \frac{1}{42}\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -119/42.$$

Así

$$y = (-51/42, -95/42, -119/42, 0) \in S',$$

de lo que se sigue, usando como es S calculado en la lección anterior,

$$S' = \{y\}+S = \{(-51/42, -95/42, -119/42, 0)\}+L[(-1/14, 29/42, -1/6, 1)] \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`