

ÁLGEBRA LINEAL.

Subespacios de Dimensión Máxima en \mathbb{R}^n .

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial **propio** de \mathbb{R}^n , es decir un subespacio tal que $S \neq \mathbb{R}^n$. La mayor dimensión que puede tener S es $n - 1$.
Sea

$$S = L[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}].$$

donde $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ forman una base de S . Tenemos S determinado por una base.

¿Cómo podemos encontrar unas ecuaciones implícitas para S ?

Si $x \in S$, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de manera que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n-1} u_{n-1}.$$

Así los vectores x, u_1, \dots, u_{n-1} son linealmente dependientes, por tanto su determinante es nulo:

$$0 = |x \ u_1 \ \dots \ u_{n-1}| = \begin{vmatrix} x_1 & u_{1,1} & u_{2,1} & \dots & u_{n-1,1} \\ x_2 & u_{1,2} & & & \\ \vdots & & & & \\ x_n & u_{1,n} & u_{2,n} & & u_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la primera columna

$$\sum_{i=1}^n x_i (-1)^{i+1} |D \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & & & & & n \end{pmatrix}| =$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0,$$

es la única ecuación implícita de S .

Ejemplo 1. Sea $S = L[(-3, 1, -2), (2, 1, 1)] \subset \mathbb{R}^3$.

Demostración: Vamos a calcular unas ecuaciones implícitas para S .

Si $(x, y, z) \in S$, entonces

$$(x, y, z) = \lambda_1(-3, 1, -2) + \lambda_2(2, 1, 1)$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x = -3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = -2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como estos tres vectores son dependientes, tiene que ocurrir (y es equivalente a lo anterior) que

$$0 = \begin{vmatrix} x & -3 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3x - y - 5z.$$

Así

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - 5z = 0\} \quad \square$$

Ejemplo 2. *Rectas en \mathbb{R}^2 (rectas vectoriales).*

Demostración: Consideramos $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ y la recta r que define en el plano:

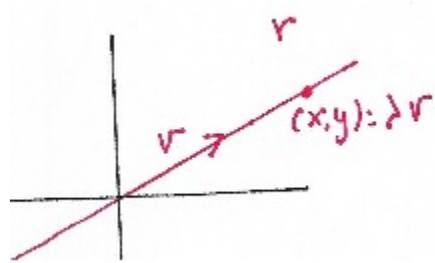


FIGURA 1. Recta Vectorial.

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda v, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Los puntos de la recta verifican también que

$$0 = \begin{vmatrix} x & v_1 \\ y & v_2 \end{vmatrix} = v_2x - v_1y.$$

La ecuación

$$v_2x - v_1y = 0$$

es la ecuación implícita de la recta r \square

Ejemplo 3. *Planos en \mathbb{R}^3 (planos vectoriales).*

Demostración: Consideramos $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ y el plano p que define en el espacio:

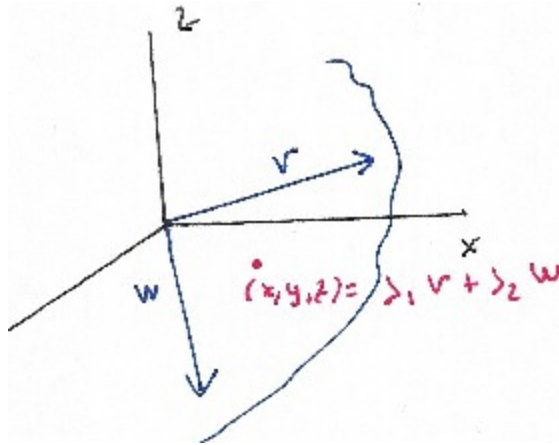


FIGURA 2. Plano Vectorial.

$$p = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda_1 v + \lambda_2 w, \text{ con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Los puntos del plano verifican también que

$$0 = \begin{vmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = ax + by + cz.$$

La ecuación

$$ax + by + cz = 0$$

es la ecuación implícita del plano p \square

Ejemplo 4. *Rectas en \mathbb{R}^2 (rectas afines).*

Demostración: Consideramos $v = (v_1, v_2), p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y la recta r del plano que pasa por p con dirección v :

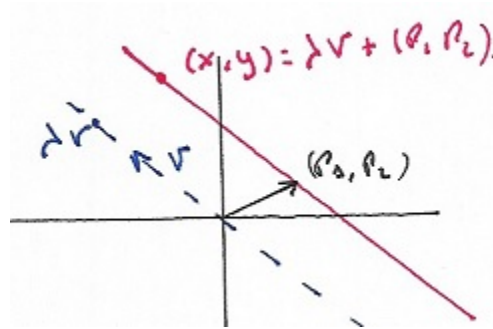


FIGURA 3. Recta Afín.

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = p + \lambda v, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Los puntos de la recta verifican también que

$$0 = \begin{vmatrix} x - p_1 & v_1 \\ y - p_2 & v_2 \end{vmatrix} = v_2x - v_1y + (v_1p_2 - p_1v_2).$$

La ecuación

$$ax - by = c$$

es la ecuación implícita de la recta r \square

Observación 1. La ecuación de la recta que pasa por dos puntos $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ viene dada por la ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} x - p_1 & q_1 - p_1 \\ y - p_2 & q_2 - p_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 5. Planos en \mathbb{R}^3 (planos afines).

Demostración: Consideramos $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3), p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y el plano P del espacio que pasa por p y con vectores directores v y w :

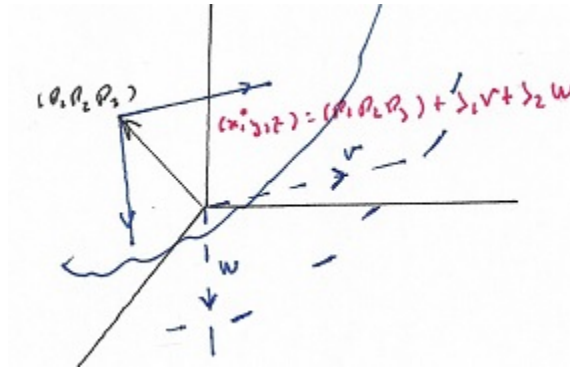


FIGURA 4. Plano Afín.

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = p + \lambda_1 v + \lambda_2 w, \text{ con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Los puntos del plano verifican también que

$$0 = \begin{vmatrix} x - p_1 & v_1 & w_1 \\ y - p_2 & v_2 & w_2 \\ z - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = ax + by + cz + d.$$

La ecuación

$$ax + by + cz = d$$

es la ecuación implícita del plano P \square

Observación 2. La ecuación del plano que pasa por tres puntos $p = (p_1, p_2, p_3), q = (q_1, q_2, q_3), t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ viene dada por la ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} x - p_1 & q_1 - p_1 & t_1 - p_1 \\ y - p_2 & q_2 - p_2 & t_2 - p_2 \\ z - p_3 & q_3 - p_3 & t_3 - p_3 \end{vmatrix}$$

Las ideas de la solución de un sistema compatible indeterminado nos permiten encontrar las ecuaciones implícitas de subespacios de menor dimensión.

Observemos que si

$$S = L[v_1, v_2, \dots, v_k] \subset \mathbb{R}^m$$

con $k < m$ y vectores independientes, entonces

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ \vdots \\ v_{1,m} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} v_{k,1} \\ \vdots \\ v_{k,m} \end{pmatrix}.$$

Como vectores $\{v_j\}$ son k vectores independientes, algun menor de orden k será no nulo; pongamos que es por comodidad

$$\begin{vmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{k,1} \\ \vdots & & \\ v_{1,k} & & v_{k,k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces los siguiente $m - k$ (dimensión complementaria a la de S) menores de orden $k + 1$ tendrán que ser nulos

$$\begin{vmatrix} x_1 & v_{1,1} & \cdots & v_{k,1} \\ \vdots & & & \\ x_k & v_{1,k} & & v_{k,k} \\ x_{k+j} & v_{1,k+j} & & v_{k,k+j} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, m - k.$$

Esto nos da $m - k$ ecuaciones, que son las ecuaciones implícitas de S .

Ejemplo 6. *Rectas en el espacio \mathbb{R}^3 .*

Demostración: Consideramos $v = (v_1, v_2, v_3), p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y la recta r del **espacio** que pasa por p con dirección v :

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = p + \lambda v, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Si $v_1 \neq 0$, los puntos de la recta verifican también que

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & v_1 \\ y - p_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

y que

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & v_1 \\ z - p_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

dos ecuaciones que nos dan las ecuaciones implícitas de la recta r □

Ejemplo 7. *Consideramos el **plano** de \mathbb{R}^4*

$$S = L[(1, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 3)].$$

queremos encontrar una ecuaciones implícitas.

Demostración: S lo podemos escribir como

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = z - y = 0$$

y

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ w & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2x - 3y + w = 0$$

son las ecuaciones implícitas del plano S \square

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: `Cesar.Ruiz@mat.ucm.es`