HOJA 3:

PROBLEMA 1: $A = \{ a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q} \}$

3.2
y
3.6
TEORÍA

SI $(a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3}) = a + a' + (b + b')\sqrt{3}$

ESTA SUMA DE FORMA ANÁLOGA A COMO SE VE QUE LA SUMA DE COMPLEJO $a+bi$ TIENE LAS PROPIEDADES CONMUTATIVA Y ASOCIATIVA, EL NEUTRO $0 + 0\sqrt{3} = 0$, Y EL OPUESTO: PARA $a + b\sqrt{3}$ ES $-a + (-b)\sqrt{3}$; SE VE QUE ESTA SUMA TIENE LAS MISMA PROPIEDADES

ESTE PRODUCTO POR ESCALARES $\alpha(a + b\sqrt{3}) = \alpha a + \alpha b\sqrt{3}$

ES CLARO QUE:

- $1(a + b\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3}$
- $\alpha((a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3})) =$

$= \alpha(a + b\sqrt{3}) + \alpha(a' + b'\sqrt{3}))$

P. DISTRIBUTIVA DE LOS REALES

- $\alpha(\beta(a + b\sqrt{3})) = (\alpha\beta)(a + b\sqrt{3})$

P. CONMUTATIVA Y ASOCIATIVA EN $\mathbb{Q}$

- $(\alpha + \beta)(a + b\sqrt{3}) = \alpha(a + b\sqrt{3}) = \beta(a + b\sqrt{3})$

P. DISTRIBUTIVA DE LOS REALES

POR TANTO $\boxed{(A + \cdot) \text{ ES UN ESPACIO VECTORIAL}}$

LA ECUACIÓN $x^2 - 3 = 0$ TIENE POR RAÍCES $0 + \sqrt{3}$ Y $0 - \sqrt{3}$

SI ENTENDEMOS QUE $(a + b\sqrt{3})(a' + b'\sqrt{3}) = (aa' + 3bb') + (ab' + ba')\sqrt{3}$

EN ESTE CASO $(\pm\sqrt{3})^2 = 3$. LO QUE RESUELVE LA ECUACIÓN.

HOJA 3:

PROBLEMA 3:] $u_1 = (7, -9, 1, -5)$

¿ $u_1 = \lambda_1 (5, -3, 17, 14) + \lambda_2 \vec{u}_3 = (1, 1, 11, 11)$

SI ES ASÍ, PARA ALGUNOS $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ENTONCES

$$\begin{aligned} 7 &= 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ -9 &= -3\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 &= 17\lambda_1 + 11\lambda_2 \\ -5 &= 14\lambda_1 + 11\lambda_2 \end{aligned}$$

ESTE ES UN SISTEMA DE 4 ECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS. VAMOS A TRATAR DE RESOLVER EL SISTEMA $\left\{ \begin{aligned} 7 &= 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ -9 &= -3\lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned} \right.$

Y SI TIENE SOLUCIÓN (SI NO LA TIENE u_1 NO SERÍA YA COMBINACIÓN LINEAL DE u_2 y u_3) HAY QUE VER QUE ES COMPATIBLE CON LAS OTRAS DOS ECUACIONES

$$\begin{aligned} 7 &= 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ -9 &= -3\lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned} \quad \overset{E_2 - E_1}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} 7 &= 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ -16 &= -8\lambda_1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \lambda_1 = 2 \text{ y } \lambda_2 = -3$$

OBSERVAMOS QUE $1 = 17 * 2 + 11(-3)$

y $-5 = 14 * 2 - 33$

LUEGO EFECTIVAMENTE u_1 ES COMBINACIÓN LINEAL DE u_2 y u_3

$$\boxed{u_1 = 2u_2 - 3u_3}$$

HOJA 3

PROBLEMA 5: $(\lambda, 1-\lambda, 0)\ (0, \lambda, 1-\lambda),\ (1-\lambda, 0, \lambda) \in \mathbb{R}^3$

OBSERVEMOS QUE LOS TRES VECTORES TIENEN UNA COORDENADA NULA EN POSICIONES DISTINTAS

SI $(\lambda, 1-\lambda, 0) = k\,(0, \lambda, 1-\lambda)$ PARA ALGÚN $k \in \mathbb{R}$

ENTONCES $\lambda = 0$ Y TENDRÍAMOS QUE

$(0, 1, 0) = k\,(0, 0, 1)$ LO CUAL NO ES POSIBLE. ASÍ $(\lambda, 1-\lambda, 0)$ Y $(0, \lambda, 1-\lambda)$ SON L. I. ¿LO SERÁ EL TERCERO ADEMÁS DE ESTOS DOS?

SI $(1-\lambda, 0, \lambda) = k_1\,(\lambda, 1-\lambda, 0) + k_2\,(0, \lambda, 1-\lambda)$

ESTO IMPLICA QUE $\begin{cases} \lambda = 0 & (k_1 0 = 0) \\ 1-\lambda = 0 & (k_2 0 = 0) \end{cases}$

ASÍ $\lambda = 0 = 1$ LO CUAL NO ES POSIBLE.

CONCLUIMOS QUE LOS TRES VECTORES SON L. INDEPENDIENTES PARA CUALQUIER VALOR $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 7: SEAN $\{(1,0,2), (0,1,1), (2,1,5), (1,1,3), (1,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$(1, 0, 2) \neq 0$

$(1, 0, 2)$ Y $(0,1,1)$ SON L. I. EN $\mathbb{R}^3$

(OBVIO POR LAS COORDENADAS NULAS DE AMBOS!

TOMAMOS $(2,1,5)$ Y VEAMOS SI ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE DE LOS ANTERIORES (SI NO PASAMOS AL SIGUIENTE).

$(2, 1, 5) = 2\,(1, 0, 2) + 1\,(0, 1, 1)$ COMO $5 = 2 \cdot 2 + 1$

$(1, 1, 3) = 1\,(1, 0, 2) + 1\,(0, 1, 1)$ COMO $3 = 2 + 1$.

$(1, 2, 1) = 1\,(1, 0, 2) + 2\,(0, 1, 1)$ COMO $1 \neq 2 + 2$

SE SIGUE QUE $\{(1,0,2)\,(0,1,1)\,(1,2,1)\}$ SON INDEPENDIENTES EN $\mathbb{R}^3$. COMO e_1 e_2 Y e_3 FORMAN UNA BASE DE $\mathbb{R}^3$, POR EL TEOREMA DE LA BASE LOS TRES VECTORES ANTERIORES TAMBIÉN.

HOJA 3:

PROBLEMA 8: $\{(1,2,3,4),(1,-2,3,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

ESTOS VECTORES SON INDEPENDIENTES COMO SE VE FÁCILMENTE. POR EL TEOREMA DE LA BASE NECESITAMOS DOS VECTORES MÁS LINEALMENTE INDEPENDIENTES

$$(1,0,0,0) \notin \lambda_1(1,2,3,4)+\lambda_2(1,-2,3,1)$$

YA QUE EN OTRO CASO $0=2\lambda_1-2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$

Y $4\lambda_1+\lambda_2=4\lambda_1+\lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_1=0$

¡LO CUAL NO ES POSIBLE!

AHORA

$$(0,1,0,0) \notin \lambda_1(1,0,0,0)+\lambda_2(1,2,3,4)+\lambda_3(1,-2,3,1)$$

YA QUE

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda_2-2\lambda_3 \\ 0 &= 3\lambda_2+3\lambda_3 \Rightarrow \lambda_2=\lambda_3 \\ 0 &= 4\lambda_2+\lambda_3 \end{aligned} \Bigg\} \; 3\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=0$$

¡LO CUAL NO ES POSIBLE!

ASÍ $\{(1,0,0,0)\ (0,1,0,0)\ (1,2,3,4)\ (1,-1,3,1)\}$ FORMAN UNA BASE DE $\mathbb{R}^4$.

PROBLEMA 9: $\{u_1,u_2,u_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ LINEAL. INDEPEND.

ENTONCES PARA $u_1+u_2,\ u_2+u_3,\ u_3+u_1$ SI

$$\lambda_1(u_1+u_2)+\lambda_2(u_2+u_3)+\lambda_3(u_3+u_1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_3)u_1+(\lambda_1+\lambda_2)u_2+(\lambda_2+\lambda_3)u_3=0$$

COMO $u_1\ u_2\ u_3$ L. I SE SIGUE QUE

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_3 &= 0 \Rightarrow \lambda_1=-\lambda_3 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= 0 \Rightarrow \lambda_1=-\lambda_2 \\ \lambda_2+\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2\lambda_1=0$$

ASÍ $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ Y $\lambda_3=0$ LUEGO $\{u_1+u_2,\ u_2+u_3,\ u_3+u_1\}$ SON L. I.

HOJA 3:

PROBLEMA 10.] $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ BASE

$v_1 = u_1 + 3u_3$

$v_2 = 3u_1 - u_3$

$v_3 = u_2$

SI v_1 v_2 Y v_3 SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES, POR EL TEOREMA DE LA BASE FORMARÁN ELLOS MISMO UNA BASE.

SEA $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 =$

$= \lambda_1(u_1 + 3u_3) + \lambda_2(3u_1 - u_3) + \lambda_3 u_2 =$

$= (\lambda_1 + 3\lambda_2)u_1 + \lambda_3 u_2 + (3\lambda_1 - \lambda_2)u_3$

COMO u_1 u_2 Y u_3 SON INDEPENDIENTES

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \boxed{\lambda_3 = 0} \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 3\lambda_1 \end{array}\right\} \lambda_1 + 9\lambda_1 = 0$$

ASÍ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ Y $\{v_1\, v_2\, v_3\}$ SON L. I.

PROBLEMA 11:] $A = \{p(x) \in \mathbb{Q}[x] : \text{grado } p \leq 2\}$

OBSERVAMOS QUE $\{1, x, x^2\}$ FORMAN UNA BASE DE A

POR OTRO LADO $1-x$ Y x^2 SON INDEPENDIENTES EN A;

$$1 + x^2 = \lambda_1(1-x) + \lambda_2 x^2 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \text{y} \\ \lambda_1 = 0 \end{array}\right.$$ ¡NO ES POSIBLE!

LUEGO $\{1-x, x^2, 1+x^2\}$ SON INDEPENDIENTES EN A, COMO UNA BASE DE A TIENE TRES ELEMENTOS, EL TEOREMA DE LA BASE NOS DICE QUE $\{1-x, x^2, 1+x^2\}$ FORMAN UNA BASE Y POR TANTO

$$3x - 2x^2 = \lambda_1(1-x) + \lambda_2 x^2 + \lambda_3(1+x^2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -3$, ASÍ $\lambda_3 = 3$ Y CLARO $\lambda_2 = -5$

HOJA 3:

PROBLEMA 12:] a) $S_1 = \{(x,y,z) : x-y+z=2\}$.

NO PUEDE SER UN SUBESPACIO VECTORIAL YA QUE $(0,0,0) \notin S_1$

c) $S_3 = \{(x,y,z) : x \geq 0\}$.

NO PUEDE SER UN SUBESPACIO VECTORIAL YA QUE SI $(x,y,z) \in S_3 \Rightarrow (-1)(x,y,z) \notin S_3$.

PROBLEMA 13:] $u_1 = (2,1,0,-3)$ $u_2 = (-1,1,-1,1)$ EN $\mathbb{R}^3$ SON INDEPENDIENTES CLARAMENTE.

SEA $L = [u_1, u_2]$ EL SUBESPACIO GENERADO POR u_1, u_2 ¿$(a,-1,b,-5) \in L$?

TENEMOS QUE VER QUE

$$(a,-1,b,-5) = x(2,1,0,-3) + y(-1,1,-1,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = a \\ x + y = -1 \\ -y = b \\ -3x + y = -5 \end{cases}$$

COMO $\begin{cases} x+y=-1 \\ -3x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ -4x=-4 \end{cases}$

ASÍ $\boxed{x=1}$ $\boxed{y=-2}$

Y POR TANTO $\boxed{a = 2+2 = 4}$

Y $\boxed{b = 2}$

HOJA 3:

PROBLEMA 19:) $B = \{u_1 \; u_2 \; u_3\}$

$B' = \{v_1 \; v_2 \; v_3\}$

CON $u_1 = v_1 + v_2$ $\quad u_2 = -v_2 - v_3$ $\quad$ y $\quad u_3 = v_1 + v_3$

a) SI $\quad u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 =$

$= \lambda_1 (v_1 + v_2) + \lambda_2 (-v_2 - v_3) + \lambda_3 (v_1 + v_3) =$

$= (\lambda_1 + \lambda_3) v_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + (-\lambda_2 + \lambda_3) v_3 =$

$= \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \eta_3 v_3$

ASÍ

$\eta_1 = \lambda_1 + \lambda_3$

$\eta_2 = \lambda_1 - \lambda_2$ $\qquad$ EN FORMA MATRICIAL

$\eta_3 = -\lambda_2 + \lambda_3$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \overset{\shortparallel}{u_1} & \overset{\shortparallel}{u_2} & \overset{\shortparallel}{u_3} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{\eta = A\lambda}$$

↑ MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

b) LA MATRIZ DE CAMBIO DE LA BASE B' A LA DE B SERÁ (SI $\eta = A\lambda \Rightarrow A^{-1}\eta = \lambda$) A^{-1}

PODEMOS CALCULAR ESTA INVERSA Ó BIEN

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_2 \\ u_2 &= -v_2 - v_3 \\ u_3 &= v_1 + v_3 \end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_2 \\ u_2 &= -v_2 - v_3 \\ u_3 - u_1 &= -v_2 + v_3 \end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_2 \\ u_2 &= -v_2 - v_3 \\ u_3 - u_1 - u_2 &= 2 v_3 \end{aligned}$$

y ASÍ $\quad v_3 = \frac{1}{2}(-u_1 - u_2 + u_3).$

$v_2 = -u_2 - v_3 = -u_2 - \frac{1}{2}(-u_1 - u_2 + u_3) = \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_2 - \frac{1}{2} u_3$

y $\quad v_1 = u_1 - v_2 = u_1 - 1/2\, u_1 + \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3$

ASÍ

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

HOJA 3:

PROBLEMA 19:] COMPROBACIÓN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) SI $w = (3,1,0)$ EN LA BASE B

EN LA BASE B' SUS COORDENADAS SERÁN

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SI $x = (1,5,3)$ EN LA BASE B'

EN LA BASE B SUS COORDENADAS SERÁN

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -7/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 20:] a) $B = \{\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}\}$ y $B' = \{\underbrace{(1,3)}_{v_1}\underbrace{(3,1)}_{v_2}\}$

CLARAMENTE $v_1 = e_1 + 3e_2$ AHORA PARA PASAR

$y\ v_2 = 3e_1 + e_2$

DE LA BASE B A B' NECESITAMOS ESCRIBIR e_1 Y e_2 COMO COMBINACIÓN LINEAL DE v_1 Y v_2

ASÍ

$$\begin{matrix} v_1 = e_1 + 3e_2 \\ v_2 = 3e_1 + e_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} v_1 = e_1 + 3e_2 \\ v_2 - 3v_1 = -8e_2 \end{matrix}$$

LUEGO $e_2 = \frac{3}{8}v_1 - \frac{1}{8}v_2$

Y $e_1 = v_1 - 3e_2 = v_1 - \frac{9}{8}v_1 + \frac{3}{8}v_2 = -\frac{1}{8}v_1 + \frac{3}{8}v_2$

LUEGO LA MATRIZ DE CAMBIO ES

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 3/8 \\ \frac{3}{8} & -1/8 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \shortparallel & \quad \shortparallel \\ e_1 & \quad e_2 \end{matrix} \end{array}$$

HOJA 3:

PROBLEMA 22:)

EN $\mathbb{R}^5$ $A = \{ \overset{V_1}{(1,1,-1,-1,-1)}, \overset{V_2}{(2,0,-2,0,1)} \overset{V_3}{(3,1,-3,-1,0)} \underset{V_4}{(5,1,-5,-1,1)} \}$

NOS PIDEN $\dim L[A]$, PARA ELLO HAY QUE HALLAR EL MAYOR NÚMERO DE VECTORES INDEPENDIENTES DE ENTRE LOS DE A

CLARAMENTE V_1 Y V_2 SON INDEPENDIENTES, YA QUE $V_1 = \lambda V_2$ NO ES POSIBLE YA QUE V_2 TIENE COORDENADAS NULAS Y V_1 NO

ES CLARO QUE $V_3 = V_1 + V_2$

Y TAMBIÉN QUE $V_4 = V_1 + 2V_2$

LUEGO $\dim L\{A\} = 2$.

EN $\mathbb{R}^5$ $B = \{ \overset{V_1}{(6,3,3,9,3)}, \overset{V_2}{(8,4,4,12,4)} \overset{V_3}{(10,5,5,15,5)} \}$

¿ $\dim L\{B\}$?

SI $V_1 = \lambda V_2 \Rightarrow \begin{cases} 6 = \lambda 8 \\ 3 = \lambda 4 \\ 3 = \lambda 4 \\ 9 = \lambda 12 \\ 3 = \lambda 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ QUE VERIFICA EL RESTO DE ECUACIONES

$V_1 = \lambda V_3 \Rightarrow \begin{cases} 6 = \lambda 10 \\ 3 = \lambda 5 \\ 3 = \lambda 5 \\ 9 = \lambda 15 \\ 3 = \lambda 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ QUE VERIFICA EL RESTO DE ECUACIONES

NOS QUEDA VER SI $V_2 = \lambda V_3 \Rightarrow \begin{cases} 8 = \lambda 10 \\ 4 = \lambda 5 \\ 4 = \lambda 5 \\ 12 = \lambda 15 \\ 4 = \lambda 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ QUE VERIFICA EL RESTO DE ECUACIONES

LUEGO EN B SOLO HAY, A LO MÁS, UN VECTOR INDEPENDIENTE.
ASÍ $\dim L\{B\} = 1$

HOJA 3:

PROBLEMA 23:-] $(\mathbb{C}, +, \times)$ ES UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $\mathbb{R}$.

CLARO, AL ESTUDIAR COMPLEJOS VIMOS QUE $(\mathbb{C}, +)$ CUMPLIA LAS PROPIEDADES Y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ Y $v, u \in \mathbb{C}$ ES CLARO (POR LAS PROPIEDADES DE CUERPO DE $\mathbb{C}$) QUE

- $1 \cdot v = v$
- $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.

———.———

COMO $\mathbb{C} = \{a+bi : a,b \in \mathbb{R}\} = \{a1 + bi : a,b \in \mathbb{R}\}$

ES DECIR SI $z \in \mathbb{C}$, z ES UNA COMBINACIÓN LINEAL DE $(1,0)$ Y $(0,1)$; ¡CLARO INDEPENDIENTES! LUEGO $\dim \mathbb{C} = 2$ (RESPECTO DEL CUERPO $\mathbb{R}$)

$(\mathbb{C}, \times, +)$ RESPECTO DEL CUERPO, EL MISMO, ES UN E. VECTORIAL YA QUE ES UN CUERPO.

AHORA EN ESTE CASO

$\forall z \in \mathbb{C}$ $z = z \cdot 1$ Y ASÍ

$\dim \mathbb{C} = 1$ (RESPECTO DEL CUERPO $\mathbb{C}$)

HOJA 3:

PROBLEMA Nº1:

a) $\mathcal{F}[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$

SI $f, g \in \mathcal{F}$ CLARAMENTE: $f+g \in \mathcal{F}$

y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda f \in \mathcal{F}$

LAS PROPIEDADES QUE HAN DE CUMPLIRSE PARA SER ESPACIO VECTORIAL SALEN DE FORMA NATURAL DE LAS PROPIEDADES DE $\mathbb{R}$ COMO CUERPO

EJEMPLO - $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \overset{\downarrow}{=} g(x)+f(x) = (f+g)(x)$

-

- $f \equiv 0$ ELEMENTO NEUTRO
- SI $f \in \mathcal{F}$ $\quad -f = (-1)f$. CLARAMENTE

etc

b) CLARAMENTE $C[a,b] \subseteq \mathcal{F}[a,b]$

SABEMOS QUE SI $f, g \in C[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

LA SUMA DE FUNCIONES CONTINUAS ES CONTINUA, ES DECIR $f+g \in C[a,b]$

y TAMBIÉN $\lambda f \in C[a,b]$

LUEGO $C[a,b]$ ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DE $\mathcal{F}[a,b]$

HOJA 3:

PROBLEMA 25: a) $f_1(t)=e^{-t}$ y $f_2(t)=te^{-t}$

$f_1(t)=e^{-t}$

$f_1'(t)=-e^{-t}$

$f_1'(t)=e^{-t}$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN:

$$f_2''(t)+2f_1'(t)+f_1(t)=$$

$$=e^{-t}-2e^{-t}+e^{-t}=0$$

ASÍ f_1 VERIFICA LA ECUACIÓN

$f_2(t)=te^{-t}$

$f_2'(t)=e^{-t}-te^{-t}$

$f_2''(t)=-2e^{-t}+te^{-t}$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN

$$f_2''(t)+2f_2'(t)+f_2(t)=$$

$$=-\cancel{2e^{-t}}+\cancel{te^{-t}}+\cancel{2e^{-t}}-\cancel{2te^{-t}}+\cancel{te^{-t}}=$$

$$=0$$

ASÍ f_2 VERIFICA LA ECUACIÓN.

b) SI x_1, x_2 SON FUNCIONES SOLUCIÓN DE:

$$x''(t)+ax'(t)+bx(t)=0$$

y $\lambda\in\mathbb{R}$

ENTONCES $f(x)=\lambda x_1+x_2$

$f'(x)=\lambda x_1'+x_2'$

$f''(x)=\lambda x_1''+x_2''$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN

$$\lambda x_1''+x_2''+a(\lambda x_1'+x_2')+b(\lambda x_1+x_2)=$$

$$=\lambda\underbrace{(x_1''+ax_1'+bx_1)}_{0}+\underbrace{(x_2''+ax_2'+bx_2)}_{0}=0$$

ASÍ λx_1+x_2 ES SOLUCIÓN DE (*). VEMOS QUE EL CONJUNTO DE SOLUCIONES DE (*) TIENE ESTRUCTURA LINEAL

c) CLARO SEAN f_1 SOLUCIÓN DE (*) CON $f_1(0)=1$ y $f_1'(0)=0$

y f_2 " DE (*) CON $f_2(0)=0$ y $f_2'(0)=1$

SI f ES SOLUCIÓN (*) CON $f(0)=c_1$ y $f'(0)=c_2$, ENTONCES

$y=c_1f_1+c_2f_2$ ES SOLUCIÓN DE (*) POR b)

y POR LA UNICIDAD DEL ENUNCIADO $y=f$.

TODAS LAS SOLUCIONES SE PUEDEN PONER COMO COMBINACIÓN DE 2.