HOJA 4:

PROBLEMA 1: a) $f(x,y) = (0,0,x)$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

COMO f VIENE DADO POR UNA MATRIZ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f ES LINEAL.

O TAMBIÉN $f(\lambda(x_1,y_1) + \beta(x_2,y_2)) =$

$= f((\lambda x_1 + \beta x_2, \lambda y_1 + \beta y_2)) = (0,0,\lambda x_1 + \beta x_2) =$

$= \lambda(0,0,x_1) + \beta(0,0,x_2) = \lambda f(x_1,y_1) + \beta f(x_2,y_2)$.

d) $f(x,y) = (x-y, 2, y) = (0,2,0) + (x-y,0,y)$.

SE PUEDE VER QUE $g(x,y) = (x-y,0,y)$ ES LINEAL, PERO AL SUMARLE $(0,2,0)$, NO LO ES. f NO ES LINEAL YA QUE

$f((0,0)) = (0,2,0) \neq (0,0,0)$. O TAMBIÉN PORQUE

$f(2(x,y)) = f(2x,2y) = (2x-2y, \underline{\underline{2}}, 2y) \neq$

$2f(x,y) = 2(x-y,2,y) = (2x-2y, \underline{\underline{4}}, 2y)$

PROBLEMA 2: a) $f(x,y,z) = (2x,4y,3z)$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

POR LAS PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES, f ES LINEAL

d) $f(x,y,z) = (y,x,1-z)$ OBSERVAMOS QUE $f(0,0,0) =$
$= (0,0,1) \neq (0,0,0)$ LUEGO f **NO** PUEDE SER LINEAL

HOJA 4:

PROBLEMA 3:] $f(\vec{u_1}) = 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2} + 2\vec{v_3}$

$f(\vec{u_2}) = \vec{v_1} - 4\vec{v_2} + \vec{v_3}$

LAS COORDENADAS DE $u_1 = (1, 0)$
Y DE $u_2 = (0, 1)$

RESPECTO DE LA BASE $\{u_1\ u_2\}$.

LAS COORDENADAS DE $f(u_1) = (2\ -3\ 2)$
Y DE $f(u_2) = (1\ -4\ 1)$

RESPECTO DE LA BASE $\{v_1\ v_2\ v_3\}$

COMO f ES UNA APLICACIÓN LINEAL, SI
$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

ENTONCES $f(u) = \lambda_1 (2, -3, 2) + \lambda_2 (1, -4, 1) =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(u_1) & f(u_2) \end{array}$$

ASÍ $\boxed{f(-1, 2)} = -f(u_1) + 2f(2) =$

$= (-2, 3, -2) + (2, -8, 2) =$

$= (0, -5, 0) = \boxed{-5v_2}$

PROBLEMA 4:] $f(x, y, z) = (2x - y,\ x + y - z) =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

— · —

HOJA 4:

PROBLEMA 5:) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ LINEAL

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (y, x-y, x+y) =$

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ FORMA MATRICIAL

b) $\ker f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0,0) \}$.

ASÍ $(x,y) \in \ker f$ SI $\begin{matrix} y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\ker f = \{ (0,0) \}$.

ASÍ LA

c) $\dim \ker f = 0$.

d) $\operatorname{Im} f \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :$ $\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = x-y \\ x_3 = x+y \end{matrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

COMO LOS VECTORES $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, SISTEMA DE GENERADORES DE $\operatorname{Im} f$

SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES, FORMAN UNA BASE DE $\operatorname{Im} f$

e) $\dim \operatorname{Im} f = 2$ LUEGO EL RANGO DE f ES 2.

f) $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 0 + 2$.

HOJA 4:

PROBLEMA 6:] a) $f(x,y,z) = (2x, 4y, 3z)$

BUSCAMOS $f(x,y,z) = (x,y,z) \iff$

$$\begin{aligned} x &= 2x \\ y &= 4y \\ z &= 3z \end{aligned} \iff x = y = z = 0$$

b) $f(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$

BUSCAMOS $f(x,y,z) = (x,y,z) \iff$

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= x+y \quad \Rightarrow x = 0 \\ z &= x+y+z \quad \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

LUEGO $(0,0,z) \in \mathbb{R}^3$ $(z \in \mathbb{R})$ VERIFICA

QUE $f(0,0,z) = (0,0,z)$.

PROBLEMA 7:] c) $f(x,y,z) = (2x-y, 2y-z, 2z-x)$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$ BUSCAMOS $f(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$

TENEMOS QUE RESOLVER EL SISTEMA CON PARÁMETRO

$$\begin{aligned} \lambda x &= 2x - y \\ \lambda y &= 2y - z \\ \lambda z &= -x + 2z \end{aligned} \iff \begin{aligned} (2-\lambda)x - y &= 0 \quad E_1 \\ (2-\lambda)y - z &= 0 \quad E_2 \\ -x + (2-\lambda)z &= 0 \quad E_3 \end{aligned}$$

POR GAUSS. $E_3 + \frac{1}{2-\lambda} E_1$

(OBSERVACIÓN SI $\lambda = 2$ $y=0$, $z=0$ y $x=0$ LUEGO EN ESTE CASO $u = (0,0,0)$.)

$$\begin{aligned} (2-\lambda)x - y &= 0 \\ (2-\lambda)y - z &= 0 \\ -\frac{1}{2-\lambda}y + z &= 0 \end{aligned} \underset{E_3+E_2}{\iff} \begin{aligned} (2-\lambda)x - y &= 0 \\ (2-\lambda)y - z &= 0 \\ \left((2-\lambda) - \frac{1}{2-\lambda}\right)y &= 0 \end{aligned}$$

- SI $(2-\lambda) - \frac{1}{2-\lambda} \neq 0 \Rightarrow y=0, z=0, x=0$
- $(2-\lambda) - \frac{1}{2-\lambda} = 0 \iff \lambda = 1$ SOLUCIÓN REAL. EN ESTE CASO $\left\{ \begin{aligned} y &= x \\ y &= z \\ y &= y \end{aligned} \right.$ $u = y(1,1,1)$, $y \in \mathbb{R}$.

HOJA 5:

PROBLEMA 8:) $f: V \to V$. $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

$f(u_1) = v_1 + v_2$

$f(u_2) = 2v_1 - v_2$

$f(u_3) = v_2 - v_3$

Como hicimos hecho en el problema 3

a) Si $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$

entonces

$$f(u) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

f es un cambio de base o de coordenadas. Pasa de las coordenadas en $\{f(u_1), f(u_2), f(u_3)\}$ a las coordenadas en B_2! Claro, si $\{f(u_1), f(u_2), f(u_3)\}$ y B_2 son bases!

b) Observamos que $(1,1,0)$, $(2,-1,0)$ y $(0,1,-1)$ son independientes en $\mathbb{R}^3$

Así $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ y $\dim \operatorname{Im} f = 3$

c) $$f(u_1+u_2+u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Como $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, f es inyectiva.

Como $\dim \operatorname{Im} f = 3$ f es sobreyectiva.

Por tanto f es una biyección.

La matriz de f^{-1} es la inversa de la matriz de arriba (calcular con Gauss-Jordan)

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 + v_2 \\ f(u_2) = 2v_1 - v_2 \\ f(u_3) = v_2 - v_3 \end{cases} \iff \begin{cases} f(u_1) = v_1 + v_2 \\ f(u_2) - 2f(u_1) = -3v_2 \\ f(u_3) = v_2 - v_3 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \frac{1}{3} f(u_1) + \frac{1}{3} f(u_2) \\ v_2 = \frac{2}{3} f(u_1) - \frac{1}{3} f(u_2) \\ v_3 = \frac{2}{3} f(u_1) - \frac{1}{3} f(u_2) - f(u_3) \end{cases}$$

Luego

$$f^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f^{-1}(v_1) & f^{-1}(v_2) & f^{-1}(v_3) \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

HOJA 4

Problema 10. $f : P[x] \longrightarrow P[x]$
$p(x) \longrightarrow f(p) = p'(x)$

a) Veamos que f es lineal. Si $p_1, p_2 \in P[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda p_1 + p_2) = (\lambda p_1 + p_2)' \underset{\downarrow}{=} \lambda p_1' + p_2' = \lambda f(p_1) + f(p_2)$$

propiedades de las derivadas

b) $\ker f = \{ p \in P[x] : p' = 0 \} \underset{\downarrow}{=} \{ p \in P[x] : p \equiv ctte \}$

integrando

$\ker f = \{ \lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbb{R} \}$ luego $p(x) \equiv 1$ es una base de $\ker f$ luego $\dim \ker f = 1$

c) $\operatorname{Im} f$ si $p \in P[x]$ $\operatorname{grad} p' = \operatorname{grad} p - 1$

luego $\operatorname{Im} f = \{ p \in P[x] : \operatorname{grad} p \leq 1 \} =$

$= \{ p = ax + b \in P[x] : a, b \in \mathbb{R} \} = [1, x]$

luego $\dim \operatorname{Im} f = 2$

d) f **no** es inyectiva ya que $\ker f \neq \{0\}$

f no es suprayectiva ya que $\forall p \in P[x]$ con $\operatorname{grad} p = 2$, no existe $q \in P[x]$ de grado dos o menor con $q' = p$.

$f(1) = 0$
$f(x) = 1$
$f(x^2) = 2x$

luego $f(Ax^2 + Bx + C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

— o —

HOJA 4:

PROBLEMA 11:

$$f(V\ B_1) \longrightarrow (V\ B_1)$$

$$(x_1 x_2 x_3) \longrightarrow f(x_1 x_2 x_3) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (*)$$

AHORA EL CAMBIO DE BASE DE COORDENADAS $(x_1' x_2' x_3')$ DE $B_2 = \{v_1\ v_2\ v_3\}$ ES:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

EN LA BASE B_1

LUEGO $(*)$ ES EQUIVALENTE A

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

ASÍ LA APLICACIÓN f EN COORDENADAS REFERIDAS A B_2 SERÁ:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

O también

$$v_1 = u_1 + u_2 \qquad \Rightarrow \boxed{u_2 = v_1 - u_1 = v_1 - v_2 - v_3}$$
$$v_2 = u_1 - u_3 \qquad \Rightarrow u_1 = v_2 + v_3$$
$$\boxed{v_3 = u_3}$$

LUEGO $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_3 f(v_3) = \alpha_1 f(u_1 + u_2) + \alpha_2 f(u_1 - u_3) + \alpha_3 f(u_3) = \alpha_1 [3u_1 - 2u_2 - 7u_2 + u_3] + \alpha_2 [3u_1 - 2u_1 - 2u_1 + u_2 + u_3] + \alpha_3 [2u_1 - u_2 - u_3] = [3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3] u_1 + [-9\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3] u_2 + [\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3] u_3$

$= [3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3][v_2 + v_3] + [-9\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3][v_1 - v_2 - v_3] + [\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3] v_3$

HOJA 4:

PROBLEMA 11:) CONTINUACIÓN

$$= [-9\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3]\, v_1 + [3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 9\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3]\, v_2$$

$$+ [3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 9\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3]\, v_3 =$$

$$= \underbrace{(-9, -1, -1)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}}_{\alpha_1'} v_1 + \underbrace{(12, 2, 3)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}}_{\alpha_2'} v_2 + \underbrace{(13, 3, 2)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}}_{\alpha_3'} v_3$$

POR TANTO LA FORMA MATRICIAL DE f RESPECTO DE LA BASE $B_2 = \{v_1\, v_2\, v_3\}$ ES

$$\begin{pmatrix} -9 & -1 & -1 \\ 12 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \alpha_3'\end{pmatrix}.$$

COMPROBACIÓN:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} *$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

AHORA

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & -1 \\ 12 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

HOJA 4:

PROBLEMA 12:

$$U \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g}$$

a)

$u_1 \to f(u_1) = e_1 - 3e_2$

$u_2 \to f(u_2) = e_1 - e_2$

$e_1 \longrightarrow g(e_1) = v_1 + 2v_2$

$e_2 \longrightarrow g(e_2) = 2v_1 - v_2$

$g \circ f \ (U\ \{u_1\ u_2\}) \longrightarrow (U\ v_1\ v_2)$

$u_1 \longrightarrow g \circ f(u_1) = g(e_1 - 3e_2) =$

$= v_1 + 2v_2 - 3(2v_1 - v_2) =$

$= -5v_1 + 5v_2$

$u_2 \longrightarrow g \circ f(u_2) = g(e_1 - e_2) =$

$= v_1 + 2v_2 - (2v_1 - v_2) =$

$= -v_1 + v_2$

ASÍ $\quad f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$

DONDE $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ SON COORDENADAS REFERIDAS A LA BASE $\{v_1\ v_2\}$

b) $\ker f = \{(\lambda_1, \lambda_2) \ : \ -5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = \frac{-1}{5}\lambda_2\}$.

LUEGO $\ker f = [(\frac{-1}{5}, 1)]$ y $\dim \ker f = 1$

$\operatorname{Im} f = [(-1, 1)]$ y $\dim \operatorname{Im} f = 1$

c) $f(u) = f(4u_1 + u_2) = 4\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 21 \end{pmatrix}$

EN COORDENADAS REFERIDAS A $\{v_1 v_2\}$.

HOJA 4

PROBLEMA 13:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^4$$

$$(1,-1) \longrightarrow (2,-1,2)$$
$$(1,2) \longrightarrow (-1,2,2)$$
$$(2,1,1) \longrightarrow (7,1,0,2)$$
$$(1,-2,0) \longrightarrow (1,-2,2,-1)$$
$$(0,1,1) \longrightarrow (1,1,0,4)$$

SEA $v_1 = (1,-1)$ $v_2 = (1,2)$ SI $v = \lambda_1' v_1 + \lambda_2' v_2$

EN FUNCIÓN
$$f(v) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix}$$

AHORA
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix}$$
CAMBIO DE COORDENADAS DE $\{v_1\ v_2\}$ A $\{e_1\ e_2\}$

INVERSA DE CAMBIO

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

ASÍ
$$f(v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

— o —

SEA $u_1 = (2,1,1)$ $u_2 = (1,-2,0)$ $u_3 = (0,1,1)$ SI $u = \eta_1' u_1 + \eta_2' u_2 + \eta_3' u_3$

EN FUNCIÓN
$$g(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(u_1) & g(u_2) & g(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \eta_1' \\ \eta_2' \\ \eta_3' \end{pmatrix}$$

AHORA
$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
CAMBIO DE COORDENADAS DE $\{u_1 \cdot u_2\ u_3\}$ A $\{e_1\ e_2\ e_3\}$

INVERSA DE CAMBIO

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -2/5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -4/5 & -2/5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & \frac{5}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

ASÍ $$g(u) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/4 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

a) LA MATRIZ DE $g\circ f$ RESPECTO DE LAS BASES CANÓNICAS ES POR TANTO

$$g\circ f(v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

b) OBSERVEMOS QUE $g\circ f(e_1) = (3,0,2,7)$ Y $g\circ f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ VECTORES INDEPENDIENTES, LUEGO $\operatorname{Im} g\circ f$ TIENE DIMENSIÓN 2 Y POR LA FÓRMULA DE LA DIMENSIÓN

$2 = \dim \ker g\circ f + \dim \operatorname{Im} g\circ f \Rightarrow \dim \ker g\circ f = 2$

HOJA 4.

PROBLEMA 15:) $f: \mathbb{R}^{2015} \longrightarrow \mathbb{R}^{2015}$ LINEAL

a) ¿ PUEDE OCURRIR QUE $\dim \ker f = \operatorname{Im} f$? NO.

LA FÓRMULA DE LA DIMENSIÓN NOS DICE QUE
$$\dim \mathbb{R}^{2015} = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$
SI LAS DIMENSIONES DEL NÚCLEO Y LA IMAGEN SON IGUALES SE TENDRÍA QUE
$$2015 = 2 \ker f$$
¡ LO CUAL NO ES POSIBLE !

¿ $f: \mathbb{R}^{2016} \longrightarrow \mathbb{R}^{2016}$ LINEAL CON $\ker f = \operatorname{Im} f$?

SEA $\{e_i\}_{i=1}^{2016}$ LA BASE CANÓNICA DE $\mathbb{R}^{2016}$

SEA f TAL QUE
$$f(e_k) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, 1008$$
Y $$f(e_j) = e_{j-1008} \quad \forall j = 1009, \ldots, 2016.$$

ES CLARO QUE
$$\ker f = [\, e_k : k = 1 \ldots 1008 \,] =$$
$$= \operatorname{Im} f = \{ e_{j-1008} : j = 1009, \ldots, 2016 \}.$$

— · —

PROBLEMA 16:) $f: (\mathbb{R}^3, B_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, B_2)$

$u_1 \longrightarrow v_1 + v_2 + 3v_3 - v_4$

$u_2 \longrightarrow 0$ $(u_2 \in \ker f)$

$u_3 \longrightarrow v_1 - v_2 + 4v_3$

LA MATRIZ DE f RESPECTO DE LAS BASES B_1 Y B_2 ES
$$f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$
$u = \sum \lambda_i u_i$ $\quad f(u_1) \quad f(u_2) \quad f(u_3)$

COMO $f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Y $f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Entonces $\operatorname{Im} f = L[\, f(u_1), f(u_2) \,]$.

HOJA 4:

PROBLEMA 18:

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = (x_1 x_2 x_3 x_4) \longrightarrow f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

¿ $\exists\, x \in \mathbb{R}^4$ TAL QUE $f(x) = (1, 2, 3)$?

TENEMOS QUE VER QUE EL SISTEMA

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + (\lambda-1)x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ \lambda x_1 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

SEA COMPATIBLE. PROCEDEMOS POR GAUSS. TENEMOS EL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + (\lambda-1)x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ \lambda x_2 \quad [-\lambda(\lambda-1)+1]x_3 + x_4 &= 3-\lambda \end{aligned}$$

EQUIVALENTE A

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + (\lambda-1)x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ [-\lambda(\lambda-1)+1-\lambda]x_3 + x_4 &= 3-3\lambda \\ [-\lambda^2+1]\, x_3 + x_4 &= 3-3\lambda \end{aligned}$$

ESTE SISTEMA ES COMPATIBLE PARA TODO VALOR DE λ

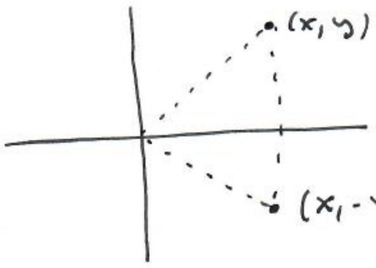
$$\begin{aligned} \boxed{x_4} &= (3-3\lambda) - [-\lambda^2+1]x_3 \\ \boxed{x_2} &= 2 - x_3 \\ \boxed{x_1} &= 1 + x_2 - (\lambda-1)x_3 = \\ &= 1 + 2 - [(\lambda-1)+1]x_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{x_3 = x_3}$$

HOJA 4:

PROBLEMA 19:

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$



Desde el punto de vista de los complejos $f(z) = \overline{z}$

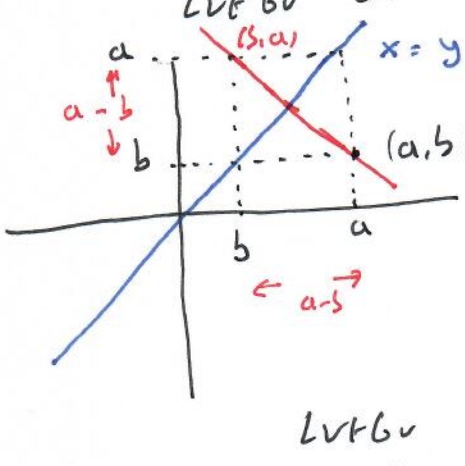
La función f lleva (x,y) a su simétrico respecto del eje de las "x"

Los únicos puntos fijos son los puntos de la forma $(x,0)$, los puntos del eje de simetría

c) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Observamos que $f(x,y) = (x,y) \iff x = y$.

Luego la recta $x = y$ queda fija



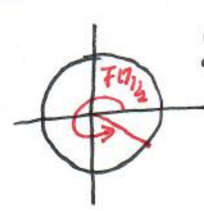
Fijémonos que (b,b) (a,b) (a,a) y (b,a) forman un cuadrado y por tanto las diagonales son perpendiculares, la recta $x = y$ y la recta que une (a,b) y (b,a)

Luego f es una simetría de eje la recta $x = y$

d) Observamos que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

Luego existe $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Este ángulo es $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

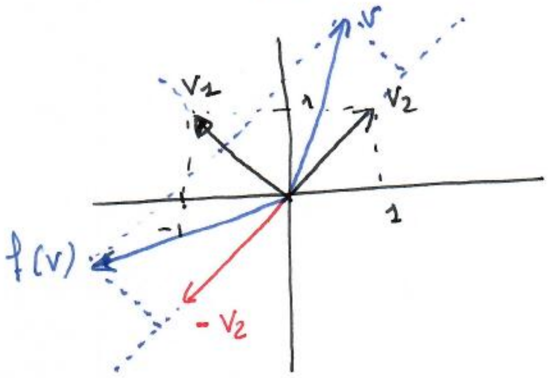


. Así f es un giro de ángulo $\frac{7\pi}{4}$.

HOJA 4:

PROBLEMA 20 | a) $B = \{(-1,1), (1,1)\}$.

Sea $v_1 = (-1,1)$ y $v_2 = (1,1)$



$v_1 = v_1 + 0\,v_2$ luego

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1.$$

$v_2 = 0v_1 + v_2$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2$$

Si $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$$f(v) = \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$$

Vemos que $f(v)$ es el simétrico de v respecto de este $y = -x$, observemos que los vectores sobre la recta que contiene a v son invariantes.

PROBLEMA 21: | $\varphi: C[a,b] \to \mathbb{R}$

$f \to \varphi(f) = \int_a^b f(t)\,dt$.

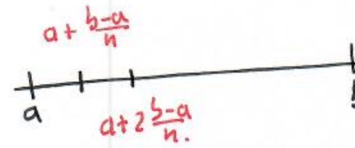
$C[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ " " " sobre sí mismo

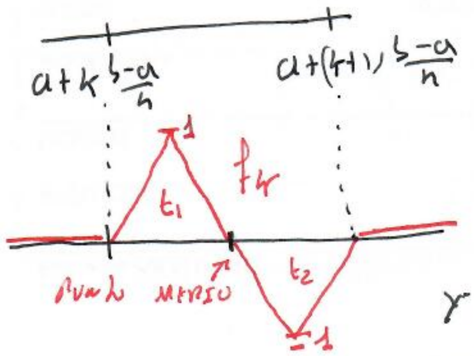
Si $f, g \in C[a,b]$ y $r, s \in \mathbb{R}$ entonces $\int_a^b sf + rg\,dt =$ (propiedades de la integral)

$= s\int_a^b f + r\int_a^b g$ lo que prueba que φ es lineal

Dividimos $[a,b]$ en n partes iguales



Para cada $k = 0, 1, \dots, n-1$ elegimos la función



t_1 triángulo igual a t_2

así $\int_a^b f_k = \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f_k = 0$

y $\{f_0 \dots f_{n-1}\}$ son independien-tes.