HOJA 5ª

PROBLEMA 1:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_2 - F_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_1 - F_2}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

PROBLEMA 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} =$$

$F_4 - aF_3$
$F_3 - aF_2$
$F_2 - aF_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & c-d \\ 0 & b^2-ab & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-d^2a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ & b(b-a) & c(c-a) & c(d-a) \\ & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

DESARROLLANDO POR LA PRIMERA COLUMNA

USANDO EL APARTADO ANTERIOR

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)$$

PASANDO A LA TRASPUESTA

$$= 2 \times 3 \times 2 = \underline{\underline{12}}$$

HOJA 5ª

PROBLEMA 4: b)

$$\begin{vmatrix} ab & b^2 & a^2 \\ a+b & 2b & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{PASAMOS A LA} \\ \text{TRASPUESTA}}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} ab & a+b & 1 \\ b^2 & 2b & 1 \\ a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} ab & a+b & 1 \\ b^2-ab & b-a & 0 \\ a^2-ab & a-b & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(a-b) \begin{vmatrix} ab & a+b & 1 \\ b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{DESARROLLANDO} \\ \text{POR LA 3ª COLUMNA}}}{=}$$

$$= (b-a)(a-b) \begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(a-b)(b-a) =$$

$$= -(a-b)(a-b)(-(a-b)) = (a-b)^3.$$

PROBLEMA 5

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{SI } k \leq \min(m,n).$$

BUSCAMOS MENORES $M = \begin{pmatrix} p_1 \dots p_k \\ q_1 \dots q_k \end{pmatrix}$

PODEMOS TOMAR $\binom{m}{k}$ (ELECCIONES DE k FILAS DISTINTAS ENTRE m FILAS)

PARA CADA ELECCIÓN DE k FILAS, PODEMOS TOMAR $\binom{n}{k}$ (ELECCIONES DE k COLUMNAS DISTINTAS ENTRE n COLUMNAS)

ASÍ LOS MENORES DISTINTOS DE ORDEN k SERÁN

$$\binom{m}{k}\binom{n}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

HOJA 5:

PROBLEMA 6: c)

$$\boxed{0} = \begin{vmatrix} 3 & x-5 & 1 \\ x+2 & x & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - 4F_1 \\ F_3 + F_1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & x-5 & 1 \\ x-10 & -3x+20 & 0 \\ 4 & x-3 & 0 \end{vmatrix} =$$

DESARROLLANDO POR LA 3 COLUMNA

$$= \begin{vmatrix} x-10 & -3x+20 \\ 4 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -3x+20 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & -3x+20 \\ 4 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= x(x-3) + \begin{vmatrix} -10 & -3x \\ 4 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 20 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-3) - 10x + 12x + 30 - 80 =$$

$$= x^2 - 3x + 2x - 50 = \boxed{x^2 - x - 50.}$$

Y LA SOLUCIÓN ES

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+200}}{2}$$

d)

$$\boxed{0} = \begin{vmatrix} x & b & c \\ a & x & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} x & b & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{=} c \begin{vmatrix} x & b & 1 \\ a-x & x-b & 0 \\ a-x & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -c(x-b)(a-x) = \boxed{-c(x-b)(x-a)}$$

DESARROLLANDO POR LA 3 COLUMNA

LUEGO $x = b$ ó $x = a$.

HOJA 5:

PROBLEMA 7:

$$\begin{vmatrix} 14 & 17 & 20 & 23 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \quad F_1 - 14F_4$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

YA QUE EL DETERMINANTE TIENE DOS FILAS IGUALES

PROBLEMA 8:

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \\ & & & & \\ 1 & 1 & & 1 & n \end{vmatrix} = \quad F_i - F_1 \quad i = 2 \ldots n$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

$\downarrow$ DESARROLLANDO POR LA 1ª COLUMNA, COMO QUEDA UNA MATRIZ DIAGONAL

b)
$$\begin{vmatrix} 2 & x & \cdots & & x \\ x & 2 & \cdots & & x \\ x & x & 2 & \cdots & x \\ & & & & \\ x & & \cdot & x & 2 \end{vmatrix}_{n\times n} = \quad \text{SI } x \neq 0 \quad x^n \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \frac{2}{x} & 1 & & 1 \\ & & & & \\ 1 & & & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}$$

SI $x=0$ EL DETERMINANTE VALE 2^n.

LUEGO TENEMOS QUE DETERMINAR UN DETERMINANTE DEL TIPO
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & a & 1 & & 1 \\ & & & & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & 1 & a \end{vmatrix}$$

SI $a=1$, EL DETERMINANTE ES NULO

HOJA 5ª

PROBLEMA 8: CONTINUACIÓN ¿ $\begin{vmatrix} a & 1 & & 1 \\ 1 & a & & 1 \\ & & & \\ 1 & & & 1\,a \end{vmatrix}$?

OBSERVEMOS QUE

$$\begin{vmatrix} a & 1 & & 1 \\ 1 & a & & 1 \\ & & & \\ 1 & & 1 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{F_j - F_1 \\ j=2\dots n}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & & 1 \\ 1-a & a-1 & & 0 \\ \vdots & 0 & a-1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1-a & 0 & & 0\ a-1 \end{vmatrix} =$$

DESARROLLANDO POR LA ÚLTIMA COLUMNA

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & & \\ & & & & a-1 \\ 1-a & 0 & & & 0 \end{vmatrix} + (a-1) \begin{vmatrix} a & 1 & & 1 \\ 1-a & a-1 & & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ 1-a & & & 0\ a-1 \end{vmatrix}_{n-1\times n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n}(1-a)(a-1)^{n-2} + (a-1) \begin{vmatrix} a & 1 & & 1 \\ 1-a & a-1 & & 0 \\ & & & 0 \\ 1-a & 0 \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

DESARROLLANDO EL DETERMINANTE POR LA ÚLTIMA FILA

$$= (a-1)^{n-1} + (a-1)\left[(a-1)^{n-2} + (a-1) \begin{vmatrix} a & 1 & & 1 \\ 1-a & a-1 & & 0 \\ & & & 0 \\ 1-a & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}\right]$$

$$= 2(a-1)^{n-1} + (a-1)^2 \begin{vmatrix} a & 1 & & 1 \\ 1-a & a-1 & & 0 \\ 1-a & 0 & & a-1 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} =$$

$$= 2(a-1)^{n-1} + (a-1)^2\left[(a-1)^{n-3} + (a-1) \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}_{n-3\times n-3}\right] =$$

$$= 3(a-1)^{n-1} + (a-1)^3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}_{n-3\times n-3} =$$

$$= \dots = (n-3)(a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-3} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}_{(n-(n-3))\times(n-(n-3)) = 3\times 3}$$

REPETIMOS EL PROCESO $n-3$ VECES

$$= (n-3)(a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-3}\left[\begin{vmatrix} 1-a & a-1 \\ 1-a & 0 \end{vmatrix} + (a-1)\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1-a & a-1 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= (n-3)(a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-2}\left[a(a-1) \underbrace{-(1-a)}_{+(a-1)}\right]$$

$$= (n-2)(a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-2}\left[(a-1)(a+1)\right] =$$

$$= (n-2)(a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-1}(a+1) = \boxed{(a-1)^{n-1}[n+a-1]}$$

HOJA 5:

PROBLEMA 8:] b) $\begin{vmatrix} 2 & x & & x \\ x & 2 & & x \\ x & x & 2 \cdots & x \\ & & \ddots & \\ x & \cdots & & x\ 2 \end{vmatrix}_{n\times n} =$ si $x \neq 0$

$$= x^n \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 2/x & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix} =$$

↓ sigo lo visto anteriormente

$$= x^n \left(\frac{2}{x} - 1\right)^{n-1} \left[n + \frac{2}{x} - 1 \right]$$

$$= x^n \frac{(2-x)^{n-1}}{x^{n-1}} \left[\frac{xn + 2 - x}{x} \right] = (2-x)^{n-1} (x(n-1)+2)$$

PROBLEMA 9:]

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & 2 & 1 & \vdots \\ & 1 & 3 & \\ & & & \ddots \\ 4 & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = \boxed{k(n-1)}$

↓ por ejercicio 8 a)

b) $\begin{vmatrix} 1 & m & m & & m \\ m & 1 & m & & m \\ m & m & 1 & & m \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ m & \cdots & & m & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{vmatrix} 2 & 2m & & 2m \\ 2m & 2 & & 2m \\ & & \ddots & \\ 2m & & 2m & 2 \end{vmatrix} =$

↓ por ejercicio 8 b)

$$= \frac{1}{2^n} (2 - 2m)^{n-1} (2m(n-1) + 2) = \boxed{(1-m)^{n-1} (m(n-1)+1)}$$

HOJA 5:

PROBLEMA 10:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGÚN LA TEORÍA
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^T$$
, DONDE (A_{ij}) ES LA MATRIZ DE ADJUNTOS

- $|A| = 1$ POR SER UNA MATRIZ TRIANGULAR
- $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

  $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

  $A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

LUEGO $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

- TRANSPONIENDO
$$A^{-1} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COMPROBACIÓN:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V.$$