HOJA 6:

PROBLEMA 2:) a) $\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ x - y - z &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$

EL DETERMINANTE DE LOS COEFICIENTES $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \end{vmatrix} = 0$; LUEGO NO SE PUEDE APLICAR CRAMER DIRECTAMENTE!

COMO $D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, EL RANGO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES 2.

AHORA LA MATRIZ AMPLIADA $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & & 3 \end{array}\right)$

TENEMOS QUE $D\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = +3 + 3 - (2 + 4) = 0$

LUEGO EL RANGO DE LA MATRIZ AMPLIADA ES TAMBIÉN 2.

TENEMOS QUE RESOLVER $\begin{aligned} -y + z &= 4 - x \\ -y - z &= 2 - x \end{aligned}$

ASÍ

$$\begin{cases} y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4-x & 1 \\ 2-x & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-4 + x \quad -2 + x}{2} = -3 + x \\[2ex] z = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 4-x \\ -1 & 2-x \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-2 + x + 4 - x}{2} = 1 \\[2ex] x = x. \end{cases}$$

HOJA 6ª

PROBLEMA 2:) c)

$$\begin{aligned} x + y - z - w &= 2 \\ x - y + z - w &= 6 \\ x - w &= 4 \\ 2x - y + z - 2w &= 10 \\ 3x - 2y + 2z - 3w &= 16 \end{aligned}$$

Es un sistema 5×4; observemos de entrada que $\frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = E_3$. El sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} x + y - z - w &= 2 \\ x - y + z - w &= 6 \\ 2x - y + z - 2w &= 10 \\ 3x - 2y + 2z - 3w &= 16 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollo 2ª fila}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollo 2ª columna}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego el rango de la matriz de coeficientes es $\underline{\underline{2}}$

La matriz ampliada también tiene rango 2 ya que (comprobado) $\frac{1}{2}E_1 + \frac{3}{2}E_2 = E_4$

y $\frac{1}{2}E_1 + \frac{5}{2}E_2 = E_5$

Luego con $\begin{vmatrix} x & y \\ x & -y \end{vmatrix} = -2$

$$\boxed{x} : \frac{\begin{vmatrix} 2+z+w & 1 \\ 6-z+w & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2-\cancel{z}-w \; -6+\cancel{z}-w}{-2} = \boxed{4+w} ; \quad \boxed{y} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+z+w \\ 1 & 6-z+w \end{vmatrix}}{-2} = \boxed{-1+z}$$

$\boxed{z = z}$ $\boxed{w = w}$

HOJA 6:

PROBLEMA 3:

$$\begin{aligned} mx - 4y - 2z &= 0 \\ 6x + 3y + 4z &= 0 \\ -x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES $\begin{vmatrix} m & -4 & -2 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$

DESARROLLO 1ª COLUMNA

$$= m\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3m - 6(-6) - (-10) = -3m + 46 = 0$$

$$\iff m = \frac{46}{3}$$

PARA ESTE VALOR DE m, COMO $D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underset{21}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} \neq 0$

TENEMOS QUE:

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= -4z \\ -x + 3y &= -3z \end{aligned}$$

POR CRAMER

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4z & 3 \\ -3z & 3 \end{vmatrix}}{21} = \frac{-12z + 9z}{21} = \frac{-3z}{21} = \boxed{-\frac{z}{7}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -4z \\ -1 & -3z \end{vmatrix}}{21} = \frac{-18z - 4z}{21} = \boxed{-\frac{22}{21}z}$$

$$z = z$$

HOJA 6:

PROBLEMA 5: b)

$$\begin{cases} -x + 2y + z = a \\ 2x + 3y - az = 4 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

MATRIZ DE COEFICIENTES $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3-4 = -7 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{DESARROLLO} \\ \text{3ª COLUMNA}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 + a - 7 = a - 2 = \begin{cases} 0 & \text{SI } a = 2 \\ \neq 0 & \text{SI } a \neq 2 \end{cases}$$

PARA $a=2$ LA MATRIZ AMPLIADA ES $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 + 4 + 6 - 4 - 4 = -16 + 13 = -3 \neq 0$$

EN ESTE CASO EL SISTEMA ES INCOMPATIBLE

PARA $a \neq 2$ EL SISTEMA ES COMPATIBLE Y POR CRAMER

$$\boxed{x} = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a-2} = 3a - 2a + 4 - 3 + a^2 - 8 / a - 2 = \boxed{\frac{a^2 + a - 8}{a-2}}$$

$$\boxed{y} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a-2} = \frac{-\cancel{4} + a^2 + 2 + \cancel{4} - a - 2a}{a-2} = \boxed{\frac{a^2 - 3a + 2}{a-2}}$$

$$\boxed{z} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a-2} = \frac{-3 - 8 + 2a + 3a + \cancel{4} - \cancel{4}}{a-2} = \boxed{\frac{5a - 11}{a-2}}$$

HOJA 6:

PROBLEMA 6: b) $\begin{cases} x - my + z = 0 \\ x + my + z = 2 \\ mx + y + z = 2 \end{cases}$

MATRIZ DE COEFICIENTES $\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= m - m^2 + \cancel{1} - m^2 - \cancel{1} + m =$

$= 2m - 2m^2 = 2m(1-m) = \begin{cases} 0 & \text{SI } m=1 \text{ ó } m=0 \\ \neq 0 & \text{SI } m \neq 1 \text{ y } m=0 \end{cases}$

SI $2m(1-m) \neq 0$ LA SOLUCIÓN POR CRAMER ES

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -m & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2m(1-m)} = \dfrac{-\cancel{2m} + 2 - 2m + \cancel{2m}}{2m(1-m)} = \dfrac{2(1-m)}{2m(1-m)} = \dfrac{1}{m}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2m(1-m)} = \dfrac{\cancel{2} + 2 - 2m - \cancel{2}}{2m(1-m)} = \dfrac{1}{m}$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2m(1-m)} = \dfrac{\cancel{2m} - 2m^2 - 2 + \cancel{2m}}{2m(1-m)} = \dfrac{-\cancel{2}(m^2+1)}{\cancel{2}m(1-m)}$

$\boxed{\text{SI } m=0}$ $\begin{matrix} x + z = 0 \\ x + z = 2 \\ y + z = 2 \end{matrix}$ } SISTEMA INCOMPATIBLE

$\boxed{\text{SI } m=1}$ $\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ \cancel{x + y + z = 2} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x - y = -z \\ x + y = 2 - z \end{matrix}$

LA SOLUCIÓN POR CRAMER $\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \right)$

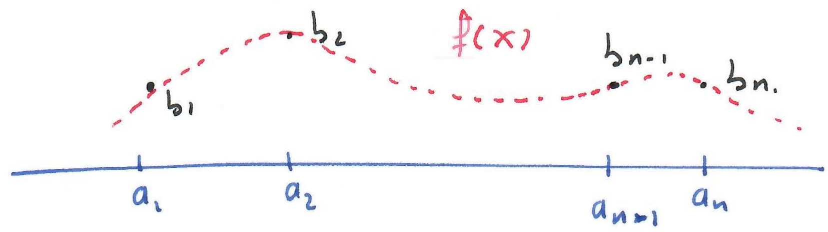
$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ 2-z & 1 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-z + 2 - z}{2} = \boxed{1 - z.}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{2 - z + z}{2} = \boxed{1}$

$\boxed{z = z}$

HOJA 6

PROBLEMA 7: b)



COMO LOS $a_1\ a_2\ \cdot\ a_n$ SON DISTINTOS LOS PODEMOS CONSIDERAR ORDENADOS (AUNQUE ESTO NO ES NECESARIO).

SEA $f(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_{n-1} x^{n-1}$ UN POLINOMIO DE GRADO $n-1$ QUEREMOS QUE $f(a_i) = b_i \quad \forall i = 0\ 1 \dots n-1$, ASÍ

$$\begin{cases} b_1 = r_0 + r_1 a_1 + \dots + r_{n-1} a_1^{n-1} \\ b_2 = r_0 + r_1 a_2 + \dots + r_{n-1} a_2^{n-1} \\ \vdots \\ b_n = r_0 + r_1 a_n + \dots + r_{n-1} a_n^{n-1} \end{cases}$$

SISTEMA LINEAL DE n-ECUACIONES Y $r_0\ r_1 \dots r_{n-1}$ INCÓGNITAS. LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^{n-1} \\ \vdots & & \cdot & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

ES UN DETERMINANTE DE VANDERMONDE QUE ES NO NULO SI $a_i \neq a_j$ SI $i \neq j$.

LUEGO EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS NOS DICE QUE EXISTE UN ÚNICO POLINOMIO DE GRADO $n-1$ (ÚNICO POR QUE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ES ÚNICA) QUE PASA POR LOS n PUNTOS FIJADOS

HOJA 6:

PROBLEMA 8: (PROBLEMA 18 HOJA 4:)

$$\text{Sí } f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t) \longrightarrow f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

¿ $(1,2,3) \in \operatorname{Im} f$?

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ si $\operatorname{Rang} A = 3$, entonces la $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ y en particular $(1,2,3) \in \operatorname{Im} f$

Si no, tendríamos que ver que la matriz ampliada $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)$ también tiene rango 2.

•) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ el rango de A es 2 ó mayor

••) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \lambda(\lambda-1) = (1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2$

determinante nulo si $\boxed{\lambda = 1}$

•••) es otro menor de orden 3 de A es

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = 0 \iff \lambda = \pm 1$$

Así si $\lambda = 1$ $\operatorname{Ran} A = 2$; si $\lambda \neq 1$ $\operatorname{Ran} A = 3$.

Para $\lambda = 1$ $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)$, tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$$

- Para $\lambda = 1$ $\operatorname{Rang} A = 2$ y $\operatorname{Rang}\left(A \,\middle|\, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = 2$, por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema ~~∃~~ tiene solución. Así siempre $(1,2,3) \in \operatorname{Im} f$

HOJA 6:

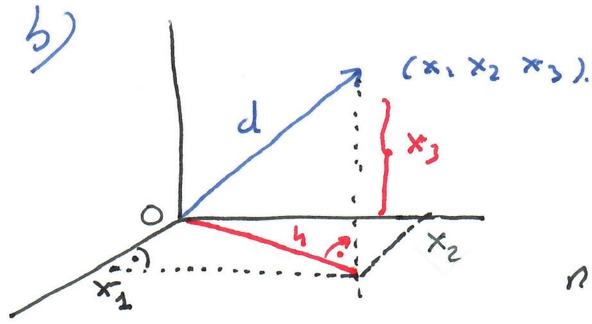
PROBLEMA 9: a) i) $<(7,5),(3,3/2)> =$

$= 7\times 3 + 5\times 3/2 = 21 + \frac{15}{2} = \frac{42+15}{2} = \frac{57}{2}$

ii) $<(1,7,2),(3,\pi,6/7)> = 1\times 3 + 7\times\pi + 2\,6/7 =$

$= 3 + 7\pi + \frac{12}{7} = \frac{21}{7} + \frac{12}{7} + 7\pi = \frac{33}{7} + 7\pi.$

b)

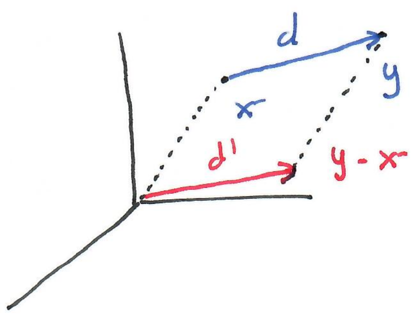


d distancia del punto a cero. Por el teorema de Pitágoras

(*) $d^2 = h^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$

$= <(x_1\ x_2\ x_3)(x_1\ x_2\ x_3)>$

Así $\boxed{d = \sqrt{<x,x>}}$.



(* *).

Por la regla del paralelogramo

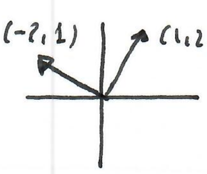
$x + (y-x) = y$

Luego en este paralelogramo

$d = d'$

y $d' = \sqrt{<y-x,\ y-x>}$ por lo de arriba.

c) $(1,2), (-2,1) \in \mathbb{R}^2$ $<(1,2)(-2,1)> = 0$



(*) $\sqrt{<x,x>}$ distancia de x a cero por definición.

(**) $\sqrt{<x-y,x-y>}$ distancia de x a y por definición.

HOJA 6:

PROBLEMA 10:] HAY QUE COMPROBAR QUE

$\langle x \times y, x \rangle = 0$ y QUE $\langle x \times y, y \rangle = 0$

LO VAMOS A HACER DE OTRA MANERA. VAMOS A BUSCAR $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ORTOGONAL A x E y.

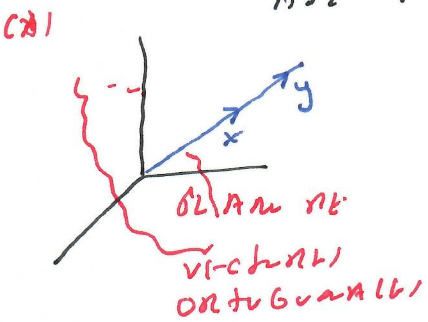
ASÍ $\left.\begin{array}{l} \langle (a,b,c), (x_1\ x_2\ x_3) \rangle = a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \\ \langle (a,b,c), (y_1\ y_2\ y_3) \rangle = a y_1 + c y_2 + c y_3 = 0 \end{array}\right\}$

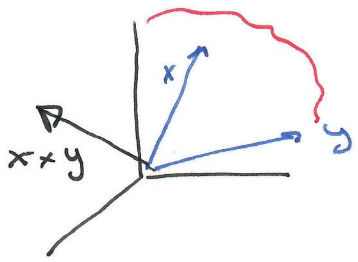
SISTEMA 2×2 COMPATIBLE INDETERMINADO. (*)

SUPONGAMOS QUE x E y SON INDEPENDIENTES (*)

ASÍ EXISTIRÁ UN MENOR DE ORDEN 2 NO NULO ASÍ POR EJEMPLO $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ASÍ POR LA REGLA DE CRAMER.

(*)





$$a = \frac{\begin{vmatrix} -c x_3 & x_2 \\ -c y_3 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{c \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -c x_3 \\ y_1 & -c y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{-c \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

RECTA DE VECTORES ORTOGONALES.

$$c = c$$

TOMANDO $c = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ TENEMOS QUE

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$ ES UN VECTOR ORTOGONAL

OBSERVACIÓN: $\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \, |\mathrm{sen}(\underbrace{\measuredangle xy}_{\theta})|$

DEM $\boxed{\|x \times y\|^2} \underset{\text{USANDO EL EJERCICIO ANTERIOR}}{=} \langle x \times y, x \times y \rangle = (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 +$

$+ (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \underset{\text{COMPROBAR}}{=} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3)^2 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2$

$\underset{\text{USANDO } |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| |\cos\theta|}{=} \|x\|^2 \|y\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \cos^2\theta = \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2\theta) =$

$= \boxed{\|x\|^2 \|y\|^2 \, \mathrm{sen}^2 \theta.}$

HOJA 6:

PROBLEMA 11:

$$x_1 = a + 2b + c - 1$$
$$x_2 = -2a - b + c + 2$$
$$x_3 = 3a + b - 2c - 5$$
$$x_4 = -2a + 4b + 6c + 4$$

DE FORMA VECTORIAL

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

OBSERVEMOS QUE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

COMO $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \neq 0$

COMO $\begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 + 5 \\ x_4 - 4 \end{pmatrix}$ ES COMBINACIÓN LINEAL DE $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ LOS MENORES DE ORDEN 3 SIGUIENTES TIENEN QUE SER NULOS

$$\boxed{0 =} \begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & 2 \\ x_2-2 & -2 & -1 \\ x_3+5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2x_1 - 2 - x_3 - 5 + 6x_2 - 12 + 4x_3 + 20 + 3x_1 + 3 - x_2 + 2 = \boxed{x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6}$$

y

$$\boxed{0 =} \begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & 2 \\ x_2-2 & -2 & -1 \\ x_4-4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -6x_1 - 6 - x_4 + 4 - 4x_2 + 8 + 4x_4 - 16 - 2x_1 - 2 - 4x_2 + 8 = \boxed{-8x_1 - 8x_2 + 3x_4 - 4}$$

DOS ECUACIONES IMPLÍCITAS QUE DESCRIBEN EL PLANO DE $\mathbb{R}^4$ DE ARRIBA DADO EN PARAMÉTRICAS.

HOJA - 6

PROBLEMA 11:)

$$x = 1 + 2p + 4q$$
$$y = 2 - p - q$$
$$z = p + 2q$$

$\Longleftrightarrow$ en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ no son paralelos ó proporcionales y además $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0$

Luego el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que tiene por vectores directores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tendrá por ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 4 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2x + 2 - 2z + 4y - 8 + 4z + x - 1 - 4y + 8 =$$

$$= \boxed{-x + 2z + 1}$$

PROBLEMA 12:)

$$\begin{aligned} bx + ay &= c \\ cx + az &= b \\ cy + bz &= a. \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$ matriz de coeficientes

$\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc$ si $abc \neq 0$ el sistema tiene solución única; por Cramer

$$x = \frac{1}{-2abc}\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = \frac{a^3 - ac^2 - b^2a}{-2abc} = \frac{a^2 - c^2 - b^2}{-2bc}; \quad \text{etc.}$$

Si $a = 0$ y $c \neq 0$ $\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} b & 0 & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = c^3 - cb^2 = c(c^2 - b^2)$

si $c = \pm b$ incompatible; en otro caso indeterminado

etc $\begin{cases} b = 0, \ a \neq 0 \ c \neq 0 \\ c = 0; \ b \neq 0 \ c \neq 0 \end{cases}$

HOJA 6:

PROBLEMA 14:

$$\begin{cases} 3y - ax + 2z = 2 \\ 2z + 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

ORDENAMOS

$$\begin{aligned} -ax + 3y + 2z &= 2 \\ 5x + 2y + 2z &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}$$

EN FORMA MATRICIAL

$$\begin{pmatrix} -a & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

RANGO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES:

COMO $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$, EL RANGO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES MAYOR O IGUAL A 2.

$$\begin{vmatrix} -a & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix} = -2ab + 6 - 20 - 4 - 4a - 15b = -4a - 15b - 2ab - 18$$

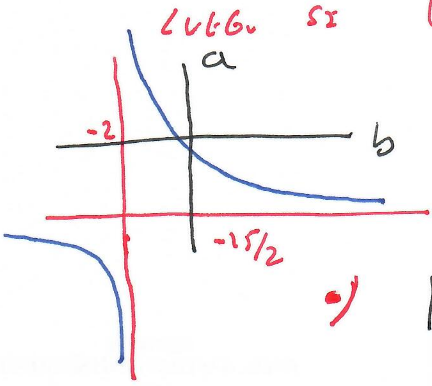
¿ $2ab + 4a + 15b + 18 = 0$?

$$= 2a(b+2) + 9b + 2\times 9 + 6b =$$

$$0 = 2a(b+2) + 15b + 18 = 2a(b+2) + 9b + 2\times 9 + 6b = (2a+9+6)(b+2) - 12.$$

$$= (2a+9)(b+2) + 6b + 12 - 12$$

LUEGO SI $(2a+15)(b+2) = 12 \iff a = \dfrac{6}{b+2} - \dfrac{15}{2}$ HIPÉRBOLA



FUERA DE LOS PUNTOS DE ESTA HIPÉRBOLA EL SISTEMA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA.

EN LOS PUNTOS DE LA HIPÉRBOLA, COMO

•) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & b & 3 \end{vmatrix} = \cancel{12} - 6 + 4b + 8 - 2b - \cancel{12} =$

$$= 2b + 2 = 0 \iff b = -1$$

•) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} -a & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -6a + 3 - 20 - 4 - 2a + 45 = -8a + 28 = 0$

$$\iff a = 28/8 = 7/2$$

$b = -1$ y $a = 7/2$ NO ESTÁN EN LA HIPÉRBOLA. EN LA HIPÉRBOLA SISTEMA INCOMPATIBLE.

HOJA 6

PROBLEMA 15: $S = L[(1\ 0\ 1\ {-1})\ (1\ 1\ 0\ {-1})\ (1\ 1\ 1\ 1)]$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1 = 1 \neq 0$$ Los tres vectores son independientes

S viene dado en paramétricas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego sus ecuaciones implícitas serán

$$\boxed{0 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 & 1 \\ t & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = x\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

desarrollando por la primera columna

PROBLEMA 17: $f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

(El dato $f(4,0,-2,0) = (-2,0,2)$ no es necesario).

Tenemos que resolver $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(o usar que $f^{-1}((-2,0,2)) = \{(4,0,-2,0)\} + \ker f$)

Rango de la matriz de coeficientes:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Rango 3 (luego por la fórmula de la dimensión $\dim \ker f = 1$)

Luego sus ecuaciones implícitas de la preimagen son

$$\begin{aligned} z + 2t &= -2 \\ y + t &= 0 \\ x - y + z - t &= 2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} z &= -2-2t \\ y &= -t \\ x &= 2 \cancel{-t} +2 +2t \cancel{+t} \\ t &= t \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así $f^{-1}((-2,0,2)) = \{(4,0,-2,0)\} + L[(2,-1,-2,1)]$.