HOJA 1.

PROBLEMA 1º) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ PARA CALCULAR LOS AUTOVALORES HACEMOS

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 4 = (5-\lambda+2)(5-\lambda-2) =$$

$$= (7-\lambda)(3-\lambda)$$

LUEGO $\lambda = 7$ y $\lambda = 3$ SON LOS DOS AUTOVALORES

PARA $\lambda = 7$ $\quad -2x + y = 0$ SUBESPACIO DE AUTOVECTORES

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = x \end{cases} \quad \text{LUEGO } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y $v_1 = (1,2)$ ES UN AUTOVECTOR

PARA $\lambda = 3$ $\quad 2x + y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} y = -2x \\ x = x \end{matrix} \quad \text{LUEGO } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y $V_2 = (1,-2)$ ES UN AUTOVECTOR

$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, HACEMOS $0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ -6 & 7 & -\lambda \end{vmatrix} =$

DESARROLLO ÚLTIMA COLUMNA

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(2+\lambda)(4-\lambda) - 7(2+\lambda) + 12 = (2+\lambda)\left[-\lambda^2 + 4\lambda - 7\right] + 12 =$$

$$= (-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda - 2\lambda^2 + 8\lambda - 14 + 12) =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

AUTOVALORES $\lambda = 2$ $\quad \lambda = 1$ $\quad \lambda = -1$

PARA $\lambda = 2$ $\quad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \begin{matrix} -4x + 2y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = z/4 \\ y = z/2 \\ z = z \end{matrix}$

$v_1 = (1, 2, 4)$ AUTOVECTOR

$\lambda = 1$ $\quad \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \begin{matrix} -3x + 2y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 2 \cdot z/9 \\ y = z/3 \\ z = z \end{matrix}$

$V_2 = (2, 3, 9)$ AUTOVECTOR

$\lambda = -1$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \begin{matrix} -x + 2y = 0 \\ 5y - z = 0 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 2z/5 \\ y = z/5 \\ z = z \end{matrix}$ $\quad V_3 = (2, 1, 5)$ AUTOVECTOR

HOJA 7:

PROBLEMA 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

PARA CALCULAR LOS AUTOVALORES PONEMOS

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 - 4 - 2\lambda + \lambda + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

AUTOVALORES $\lambda = 1$ CON MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA DOBLE

y $\lambda = -2$

PARA $\lambda = -2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 \neq 0$$

LUEGO

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 6x + 6y &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

LUEGO

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= -x \\ z &= 0 \end{aligned}$$

LUEGO $v = (1, -1, 0)$ ES UN AUTOVECTOR

PARA $\lambda = 1$ LA MATRIZ

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

TIENE RANGO 2

YA QUE $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 \neq 0$, LUEGO SOLO VAMOS A PODER ENCONTRAR UN AUTOVECTOR INDEPENDIENTE.

$$\begin{aligned} -x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x - 2y - 2z &= 0 \\ 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -z \\ z &= z \end{aligned}$$

ASÍ $V = (0, -1, 1)$ ES UN AUTOVECTOR

HOJA 1:

PROBLEMA 4.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

- Primero calculamos los autovalores.

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & -4-\lambda & -2 \\ 4 & 12 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{desarrollo} \\ 1^a \\ \text{columna}}}{=}$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 12 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4-\lambda & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)\left[(4+\lambda)(5-\lambda) - 24\right] + 4\left[(4+\lambda) - 6\right] =$$

$$= (\lambda-2)\left[-\lambda^2+\lambda-4\right] + 4\left[\lambda-2\right] =$$

$$= (\lambda-2)\left[-\lambda^2+\lambda\right] = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$$

Los autovalores son $\lambda=0$, $\lambda=1$ y $\lambda=2$

PARA $\lambda=0$ Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos el sistema

$$2x+3y+z=0$$
$$-4y-2z=0 \Rightarrow y = -\tfrac{1}{2}z \qquad x = -z/2 + \tfrac{3}{4}z = \tfrac{1}{4}z$$

Para $z=4$ $\quad v_1 = (1, -2, 2)$ es un autovector

PARA $\lambda=1$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ tenemos el sistema

$$x+3y+z=0$$
$$-5y-2z=0 \Rightarrow y = -\tfrac{2}{5}z \qquad x = \tfrac{6}{5}z - z = \tfrac{1}{5}z$$

Si $z=5$ $\quad v_2 = (1, -2, 5)$ es un autovector

PARA $\lambda=2$ $\quad \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ tenemos el sistema.

$$-6y-2z=0 \qquad y = -\tfrac{1}{3}z$$
$$4x+12y+3z=0 \qquad x = \left(\tfrac{12}{3}z - 3z\right)\tfrac{1}{4} = \tfrac{z}{4}$$

Si $z=12$ entonces $v_3 = (3, -4, 12)$ es un autovector.

Es diagonalizable por tener tres autovalores distintos.

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz de paso P es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$.

HOJA 7.

Problema 5: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

CALCULAMOS LOS AUTOVALORES

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2-\lambda)+2 = -\lambda^2+2\lambda+2$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

COMO TIENE DOS AUTOVALORES REALES Y DISTINTOS LA MATRIZ ES DIAGONALIZABLE

Problema 6: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $0 = |A - \lambda I| = (2-\lambda)^2(\lambda - 1)$

LOS AUTOVALORES SON $\lambda = 2$ CON MULTIPLICIDAD 2
Y $\lambda = 1$

Como $\dim(\operatorname{Ker} A-2I) = 3 - \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

LA MATRIZ ES DIAGONALIZABLE CON

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DONDE

$V_3 = (0,0,1)$ ES UN AUTOVECTOR PARA $\lambda = 1$

Y PARA $\lambda = 2$ EL SISTEMA $2x - y - z = 0$

$V_1 = (1,1,1)$
Y $V_2 = (0,1,-1)$ SON AUTOVECTORES INDEPENDIENTES PARA $\lambda = 2$

ASÍ LA MATRIZ DE PASO P ES

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \end{array}$$

HOJA 7.

PROBLEMA 7:)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = (1-\lambda)^3 + 3\lambda - 1 =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 \cancel{-3\lambda} \cancel{+1} \cancel{+3\lambda} \cancel{-1} = -\lambda^2(\lambda - 3)$$

AUTOVECTORES $\lambda = 0$ Y $\lambda = 3$

AHORA $\dim \ker A = 3 - \text{rang}\, A = 3 - 2 = 1$

YA QUE $\left| D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 1 \neq 2$

LUEGO COMO $\dim \ker A \neq 2$ LA MATRIZ NO ES DIAGONALIZABLE.

PROBLEMA 8:)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

DESARROLLO 1ª COLUMNA

$$= \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$$

CUATRO AUTOVALORES

AUTOVALORES $\lambda = \pm i$ $\lambda = \pm 1$ DISTINTOS, PERO SOLO DOS REALES.

SOBRE $\mathbb{R}$ A NO ES DIAGONALIZABLE.

SOBRE $\mathbb{C}$ A ES DIAGONALIZABLE.

HOJA 7

PROBLEMA 10:] $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

LUEGO LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE A ES $0 = |A-\lambda I| = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$

TEORÍA

ES UN POLINOMIO DE GRADO n EN λ CON COEFICIENTES REALES YA QUE A TIENE ENTRADAS REALES

LUEGO SI $\lambda \in \mathbb{C}$ ES SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA, COMO VIMOS EN LAS LECCIONES SOBRE COMPLEJOS $\bar{\lambda}$ TAMBIÉN ES RAÍZ.

PROBLEMA 11:] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ SI A DIAGONALIZABLE, SOLO NECESITAMOS ENCONTRAR UNA MATRIZ DE PASO

AUTOVALORES

$$0 = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[\lambda(\lambda-2)+1] =$$

DESARROLLO 3 FILA

$= (1-\lambda)[\lambda^2-2\lambda+1] = (1-\lambda)(\lambda-1)^2$; LUEGO $\lambda = 1$ ES UN AUTOVALOR DE MULTIPLICIDAD 3

COMO $\text{Rang}\,|A-I| = \text{Rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$,

$\ker(A-I) = 2$, LUEGO A NO ES DIAGONALIZABLE;

TAL QUE

SI EXISTIESE B BASE TAL QUE RESPECTO ESTA BASE.

$w = f(v) = Dv$ CON D DIAGONAL,

SEA P ES CAMBIO DE BASE DE B A LA BASE CANÓNICA, ASÍ

$x = Pv \Rightarrow v = P^{-1}x$ y $w = P^{-1}y$

LUEGO $P^{-1}y = D P^{-1}x \iff \boxed{y = PDP^{-1}x = Ax}$

ASÍ A Y D SON SEMEJANTES Y TIENEN EL MISMO AUTOVALOR $\Rightarrow D = I$ Y ASÍ $A = I$ LO CUAL NO ES POSIBLE.

HOJA 7:

PROBLEMA 12: a) Si $v \in V$, entonces

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 v_3$$

y $\underset{\text{f lineal}}{f(v) =} x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + x_3 f(u_3) \underset{\text{hipótesis}}{=}$

$$\underset{\text{hipótesis}}{=} x_1 u_1 + x_2 (u_1 - 2u_2) + x_3 (u_1 - 2u_2)$$

$$0 = f(u_2 - u_3) = f(u_2) - f(u_3) = (u_1 - 2u_2) - f(u_3)$$

luego $f(u_3) = u_1 - 2u_2$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) u_1 + (-2x_2 - 2x_3) u_2 + 0 u_3$$

Así

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = f(x_1 x_2 x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_2 - 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) & & \\ f(u_1)\ \ f(u_2)\ \ f(u_3) & & \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) $\operatorname{Im} f = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ y así $\dim \operatorname{Im} f = 2$

c) Autovalores de $f \iff \boxed{0 = |A - \lambda I|} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$= \boxed{\lambda(2+\lambda)(1-\lambda)}$ autovalores $\lambda = 0$ $\lambda = -2$ y $\lambda = 1$

Ec. característica

d) Si calculamos los autovectores, tendremos una base respecto de la cual la matriz de f es diagonal

$\lambda = 1$ $v_1 = u_1$ $f(v_1) = v_1$.

$\lambda = 0$ $v_2 = u_2 - u_3$ $f(v_2) = 0$

$\lambda = -2$ nos da el sistema $\left\{ \begin{matrix} 3x + y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{matrix} \right.$ $v_3 = (-1, 3, 0)$ es un autovector

$B' = \{v_1, v_2, v_3\}$.

e) La matriz de cambio de base o la matriz de paso es

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

HOJA 7:

PROBLEMA 13:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & m+2 & 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES $0 = |C - \lambda I| = (1-\lambda)^3$ LUEGO $\lambda = 1$

ES AUTOVALOR TRIPLE

SEGÚN LO VISTO EN EL EJERCICIO 11,
C SOLO PUEDE SER DIAGONALIZABLE SI $C = I$,
PERO ESO NO ES POSIBLE INDEPENDIENTEMENTE
DEL VALOR $m \in \mathbb{R}$, POR EL 2 MARCADO EN
ROJO.

PROBLEMA 14:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- OBVIAMENTE PARA $k=0$, LA MATRIZ NULA "ES DIAGONALIZABLE"

- AUTOVALORES $0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ k & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (k - \lambda)$

AUTOVALORES $\lambda = k$ Y $\lambda = 0$ DOBLE.
PARA QUE A SEA DIAGONALIZABLE NECESITAMOS
QUE $\dim(\ker A) = 2$, PERO ESO NO ES
POSIBLE SI $k \neq 0$ YA QUE, PARA $\lambda = 0$

$$\left| D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2 \neq 0 \quad \text{SI } k \neq 0.$$

HOJA 7.

PROBLEMA 15) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ¿ A^{47} ?

SI A ES SEMEJANTE A UNA MATRIZ DIAGONAL, ES DECIR $J = Q^{-1} A Q$.

Entonces por teoría

$$A^{47} = Q J^{47} Q^{-1}$$

$\boxed{\text{AUTOVALORES}}$ $0 = |A - \lambda I| = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2$

LUEGO $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ doble son los autovalores

COMO $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ son dos autovectores independientes para $\lambda = -1$

BUSCAMOS AUTOVECTOR PARA $\lambda = 1$; TENEMOS EL SISTEMA

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 5x - 2z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{5}{2}x \end{array}$$

SI $x = 2$ $V_1 = (2, 3, 5)$ ES EL AUTOVALOR BUSCADO

ASÍ LA MATRIZ DE PASO ES $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\quad\quad V_1 \quad e_2 \quad e_3$

$$Q^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{A = Q J Q^{-1}}$

ASÍ $\boxed{A^{47}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{47} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{Q J Q^{-1} = A}$

$J^{46} = I$

HOJA 7:

PROBLEMA 16: MATRIZ EJERCICIO 9 DE LA HOJA 7:

SEA $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I + B$

OBSERVEMOS QUE $I \cdot B = B I$.

LUEGO $(I+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} I^{k-j} B^j$

SE PUEDE USAR EL BINOMIO DE NEWTON YA QUE I y B CONMUTAN RESPECTO DEL PRODUCTO.

OBSERVEMOS QUE

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

LUEGO $B^3 = B^2 \cdot B = -IB = -B$

y $B^4 = B^2 \cdot B^2 = -I \cdot (-I) = I$

$B^5 = B$ etc

ASÍ $$(I+B)^{100} = \sum_{l=0}^{50} \binom{100}{2l} B^{2l} + \sum_{l=0}^{49} \binom{100}{2l+1} B^{2l+1} =$$

$$= \sum_{l=0}^{50} \binom{100}{2l} (-1)^l I + \sum_{l=0}^{49} \binom{100}{2l+1} (-1)^l I B$$

$B^0 = 1$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{50} \binom{100}{2l}(-1)^l & \sum_{l=0}^{49} \binom{100}{2l+1}(-1)^l \\ -\sum_{l=0}^{49} \binom{100}{2l+1}(-1)^l & \sum_{l=0}^{50} \binom{100}{2l}(-1)^l \end{pmatrix}.$$

SACANDO FACTOR COMÚN I y B

HOJA 7:

PROBLEMA 17.
$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n \end{cases}$$

EN FORMA MATRICIAL
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

SI $x_1 = 1$ e $y_1 = 1$ entonces
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

VEAMOS QUE $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ SE PUEDE DIAGONALIZAR

AUTOVALORES. $0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda) + 3 =$
$$= \lambda^2 - 8\lambda + 12 + 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$$

CALCULAMOS AUTOVECTORES

$\lambda = 5$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$ SISTEMA $x - y = 0 \iff x = y$ $v_1 = (1,1)$ Autovector

$\lambda = 3$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ SISTEMA $3x - y = 0 \iff$ $v_2 = (1,3)$ Autovector.

ASÍ LA MATRIZ $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ son SEMEJANTES
$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

CALCULO P^{-1}
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

ASÍ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 3^n \\ 5^n & 3^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 5^n & 3^{n+1} \end{pmatrix} =$
$$= \begin{pmatrix} 3/2\, 5^n - 3^n/2 & -\frac{5^n}{2} + \frac{3^n}{2} \\ 3/2\, 5^n - \frac{3^{n+1}}{2} & -\frac{5^n}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} \end{pmatrix}$$

LUEGO $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n \\ 5^n \end{pmatrix}$ y $\boxed{\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1}) = \frac{1}{4}(3 \times 5^n + 5^n) = 5^n}$

HOJA 7:

PROBLEMA 18:

a) λ VERIFICA QUE $0=|A-\lambda I|$

AHORA $0=|A^t-\lambda I|=|A^t-\lambda I^t|=$

$$=|(A-\lambda I)^t| = |A-\lambda I|$$

POR TEORÍA SABEMOS QUE EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ Y SU TRASPUESTA SON IGUALES

LUEGO SI $|A-\lambda I|=0 \iff |A^t-\lambda I|=0$

b) $A=(a_{ij})\in M_n$ CON $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1 \quad \forall j=1,2\ldots n.$

$$0=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n}-\lambda \end{vmatrix} =$$

PROPIEDAD DETERMINANTES

$F_n+(F_1+F_2+\ \ +F_{n-1})$

COMO $a_{nj}=1-\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}$ $\quad j=1\ldots n$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & a_{1n} \\ a_{n-1} & a_{n-1\,n-1}-\lambda & a_{n-1\,n} \\ (1-\lambda)\ (1-\lambda) & & (1-\lambda) \end{vmatrix} =$$

DESARROLLANDO POR LA ULTIMA FILA

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(1-\lambda)\left|D\begin{pmatrix}1 & 2 & & n-1\\ 1 & j-1 & j+1 & n\end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)\Big(\qquad \Big)$$

LUEGO PARA $\lambda=1$ EL DETERMINANTE SE ANULA.

HOJA 7

PROBLEMA 19] (O EL PROBLEMA 2.20

TENEMOS LOS VECTORES DE PROBABILIDAD (x_n, y_n) QUE SE TRANSFORMABAN ES OTROS POR

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

CON $T = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{45}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{55}{100} \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 95 & 45 \\ 5 & 55 \end{pmatrix}$

a) BUSCAMOS $v = (x_0, y_0)$ CON $Tv = v$, UN AUTOVECTOR CON AUTOVALOR 1

(POR EL EJERCICIO ANTERIOR 7.18 SABEMOS QUE UNA MATRIZ ESTOCÁSTICA COMO T TIENE POR AUTOVALOR 1)

AUTOVALORES $\begin{vmatrix} \frac{95}{100} - \lambda & \frac{45}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{55}{100} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{95}{100} - \lambda\right)\left(\frac{55}{100} - \lambda\right) - \frac{225}{100^2} =$

$$= \lambda^2 - \frac{150}{100}\lambda + \frac{95 \times 55}{10^4} - \frac{225}{10^4} =$$

$$= \lambda^2 - \frac{150}{100}\lambda - \frac{15000}{10^4} = (\lambda - 1)(\lambda - 1/2)$$

PARA $\lambda = 1$ ECUACIÓN $-\frac{5}{100}x + \frac{45}{100}y = 0 \iff x = 9y$

PARA $y = \frac{1}{10}$ $x = \frac{9}{10}$. $v_1 = \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right)$ AUTOVECTOR

LUEGO $\boxed{\left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right)}$ ES UN VECTOR DE PROBABILIDAD INVARIANTE. ¡COMPROBAR!

b) PARA $\lambda = 1/2$ AUTOVALOR $v_2 = (1, -1)$. ASÍ LA MATRIZ DE PASO ES $\begin{pmatrix} 9/10 & 1 \\ 1/10 & -1 \end{pmatrix}$,

$T = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} Q^{-1}$. $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{10} & -\frac{9}{10} \end{pmatrix}$ COMPROBAR

ASÍ $T^n = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & 1 \\ 1/10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{10} & -\frac{9}{10} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & 1 \\ \frac{1}{10} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{10} & -\frac{9}{10} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 9/10 & 1 \\ \frac{1}{10} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 9/10 \\ 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$

LUEGO $T^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{pmatrix} 9/10 & 9/10 \\ 1/10 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{9}{10}(x_0 + y_0), \frac{1}{10}(x_0 + y_0)\right) =$

$x_0 + y_0 = 1$ $= (9/10, 1/10)$

HOJA 7:

PROBLEMA 20:] SEAN

x_t ALUMNOS MATRICULADOS POR PRIMERA VEZ EN LA CONVOCATORIA t

$x_0 = 125$

$x_t = 0$ SI $t \geq$

y_t ALUMNOS APROBADOS EN LA CONVOCATORIA t O ANTERIORES

$y_0 = 0$

z_t ALUMNOS COMPENSABLES EN LA CONVOCATORIA t

$z_0 = 0$

w_t ALUMNOS SUSPENSOS EN LA CONVOCATORIA t

$w_t = 0$

EL ENUNCIADO NOS DICE QUE:

$$x_t = 0 \qquad \text{SI } t \geq 1$$

$$y_t = \frac{3}{10} x_{t-1} + \frac{7}{10} z_{t-1} + \frac{3}{10} w_{t-1} + y_{t-1} \qquad t \geq 1$$

$$z_t = \frac{3}{10} x_{t-1} + \frac{1}{10} z_{t-1} \qquad t \geq 1$$

$$w_t = \frac{4}{10} x_{t-1} + \frac{2}{10} z_{t-1} + \frac{7}{10} w_{t-1} \qquad t \geq 1$$

DE FORMA MATRICIAL

$$v_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 7/10 & 3/10 \\ 3/10 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 4/10 & 0 & 2/10 & 7/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ w_{t-1} \end{pmatrix} = A v_{t-1}$$

NOS PIDEN CALCULAR $y_6 = \left(A^6_{2j}\right) \cdot \begin{pmatrix} 125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

TENEMOS QUE CALCULAR A^6 DE ESTA MATRIZ ESTOCÁSTICA (YA QUE LAS ENTRADAS DE CADA COLUMNA SUMAN 1)

HOJA 7:

PROBLEMA 20:] CONTINUACIÓN

OBSERVAMOS QUE $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} B$

Y QUE $A^6 = \frac{1}{10^6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^6.$

VAMOS A DIAGONALIZAR B

$$0 = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10-\lambda & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(10-\lambda)(1-\lambda)(7-\lambda)$$

DESARROLLO 1ª FILA

DESPUÉS, DESARROLLO 1ª COLUMNA

ASÍ $\lambda = 0$ $\lambda = 10$ $\boxed{\lambda = 1}$ y $\lambda = 7$ SON AUTOVALORES

MISMO EL PROBLEMA 18

COMO TENEMOS 4 AUTOVALORES REALES Y DISTINTOS LA MATRIZ ES DIAGONALIZABLE.

AUTOVECTORES

PARA $\lambda = 1$ SALE $v_1 = (0, 2, -3, 1)$ ¡COMPROBAR!

PARA $\lambda = 10$ SALE $v_2 = (0, 1, 0, 0)$ ¡COMPROBAR!

PARA $\lambda = 0$ SALE $v_3 = (7, 12, -21, 2)$ ¡COMPROBAR!

PARA $\lambda = 7$ SALE $v_4 = (0, -1, 0, 1)$ ¡COMPROBAR!

ASÍ LA MATRIZ DE PASO ES $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 12 & -1 \\ -3 & 0 & -21 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Y $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = Q^{-1} B Q$

TENEMOS QUE CALCULAR Q^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -21 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -21 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -15 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

HOJA 7:

PROBLEMA 20:) CONTINUACIÓN.

$$\begin{array}{l} \sim \\ \frac{1}{7}F_3 \\ F_4+15F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15/7 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\frac{F_4}{3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/7 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2+3F_4 \\ F_1-F_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -5/7 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 15/7 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/7 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1-2F_3 \\ F_2-8F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & -1/3 & 0 \\ I & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1/7 & 0 & 0 & 0 \\ & 5/7 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

Así $A^6 = \frac{1}{10^6} B^6 = \frac{1}{10^6} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^6 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$.

$B = QJQ^{-1}$

Como buscamos Y_6 en $A^6 \begin{pmatrix} 125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -125 \\ 125 \\ \frac{125}{7} \\ \frac{625}{7} \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{1}{10^6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 12 & -1 \\ -3 & 0 & -21 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10^6}\begin{pmatrix} \sim & \sim & \sim & \sim \\ 2 & 10^6 & 0 & -7^6 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim & \sim \end{pmatrix}$$

Luego $\boxed{Y_6} = \frac{1}{10^6}\begin{pmatrix} 2 & 10^6 & 0 & -7^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -125 \\ 125 \\ \frac{125}{7} \\ \frac{625}{7} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{10^6}\left[-250 + 10^6 \times 125 - 7^5 \times 625\right] =$$

$$= \frac{125}{10^6}\left[-2 + 10^6 - 7^5 \times 5\right] = 125\left[-\frac{2}{10^6} + 1 - \frac{49 \times 49 \times 35}{10^6}\right]$$

$$= 125\left[\frac{10^6}{10^6} - \frac{2 + 84035}{10^6}\right] \simeq \boxed{114,49}$$