ÁLGEBRA PRÁCTICA-3

Nombre y apellidos..

1.- Se consideran las matrices $A \in M_{4\times 3}$ y $B \in M_{3\times 3}$, donde

$$A = (a_{i,j}) \quad \text{con} \quad a_{i,j} = 2i - j, \;\; i = 1, ..., 4; j = 1, 2, 3.$$

Y

$$B = (b_{i,j}) \quad \text{con} \quad b_{i,j} = \frac{i+j}{2}, \;\; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3.$$

Calcula AB.

$A \cdot B \in \mathcal{M}_{4\times 3}$. ASÍ $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,2,3}}$ CON

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{3} (2i-k)\left(\frac{k+j}{2}\right) =$$

$$= (2i-1)\left(\frac{1+j}{2}\right) + \cancel{2}(i-1)\frac{2+j}{\cancel{2}} + (2i-3)\frac{3+j}{2}$$

O BIEN

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 2 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 8 & 11 & 14 \\ 17 & 23 & 29 \\ 26 & 35 & 44 \end{pmatrix}.$$

2.- Demuestra la **propiedad asociativa** del producto de matrices cuadradas.

CONSIDERAMOS $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ $\begin{matrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots n. \end{matrix}$

(MATRICES CUADRADAS)

SEAN $D = A(B \cdot C) = (d_{ij})$ Y $E = (A \cdot B) \cdot C = (e_{ij})$

ENTONCES

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{t=1}^{n} b_{k,t} \cdot c_{t,j}\right) \underset{1}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{n} (a_{ik} b_{k,t})\, c_{t,j}\right) =$$

1: USANDO LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA Y ASOCIATIVA EN IR

$$\underset{2}{=} \sum_{t=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kt})\right) c_{t,j} = e_{ij}$$

2: PROPIEDAD CONMUTATIVA EN IR Y LA DISTRIBUTIVA.

$\forall \; i = 1 \dots n, \; j = 1 \dots n.$

3.- Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \ \text{y} \ D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Resuelve la ecuación:

$$AX - 2B + C = D.$$

$AX - 2B + C = D \iff AX = D + 2B - C \iff X = A^{-1}(D+2B-C)$ SI $\exists A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right] \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

(*) POR GAUSS JORDAN $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ LUEGO $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.- Calcula el **rango** por filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es su forma normal de Hermite por filas?

VAMOS A TRANSFORMAR LA MATRIZ EN OTRA ESCALONADA CON UNOS, SI ES POSIBLE, EN LA DIAGONAL

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 4 & -7 \end{pmatrix} \underset{F_2 - 5F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 4 & -7 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{1/7 F_2 \\ 1/9 F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/7 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{9} & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1 + F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/7 & 1 & 2/7 \\ 0 & 1 & -2/7 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_1 - 5/7 F_3 \\ F_2 + 2/7 F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8/63 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -41/63 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 & -1 \end{pmatrix}$$ FORMA NORMAL DE HERMITE POR FILAS.

COMO HAY 3 FILAS NO NULAS EL RANGO DE LA MATRIZ ES $\underline{\underline{3}}$