ÁLGEBRA PRÁCTICA-4

Nombre y apellidos...

1.- Se considera el sistema de vectores $\{ u_1 = (1,2,3,), u_2 = (2,1,0), u_3(-1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Demuestra que este sistema forma una **base** de $\mathbb{R}^3$. Calcula las coordenadas del vector $u = (1,-1,0)$ en la nueva base.

LOS VECTORES $u_1, u_2\ u_3$ SON INDEPENDIENTES SI $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i = 0$ IMPLICA QUE $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. AHORA $0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i =$

$$= \lambda_1 (1,2,3) + \lambda_2 (2,1,0) + \lambda_3 (-1,-1,0) \iff$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = 0 \end{matrix}$$

ASI $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. COMO $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, Y $\{u_1 u_2 u_3\}$ SON TRES VECTORES INDEPENDIENTES, POR EL TEOREMA DE LA BASE FORMAN UNA BASE.

AHORA $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \\ 3\lambda_1 = 0 \end{cases}$

$$\iff \left.\begin{matrix} 2\lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_3 - 1 \\ \lambda_1 = 0 \end{matrix}\right\} \iff \left|\begin{matrix} 2\lambda_3 - 2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_3 - 1 \\ \lambda_1 = 0 \end{matrix}\right. \iff \lambda_3 = 3\ ;\ \lambda_2 = 2 \text{ Y } \lambda_1 = 0$$

LUEGO $u = 2u_2 + 3u_3$ Y SU NUEVA COORDENADAS SON $(0,2,3)$.

2.- Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un espacio vectorial V. Si $u_1 = v_1 + 2v_2$, $u_2 = 2v_1 - v_2$ y $u_3 = v_3$, prueba que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una nueva base de V

LOS VECTORES $u_1\ u_2\ u_3$ SON INDEPENDIENTES SI $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i = 0$ IMPLICA QUE $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ AHORA $0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i =$

$$= \lambda_1 (v_1 + 2v_2) + \lambda_2 (2v_1 - v_2) + \lambda_3 v_3 =$$

$$= (\lambda_1 + 2\lambda_2) v_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \lambda_3 v_3$$

COMO $v_1\ v_2$ Y v_3 SON INDEPENDIENTES POR FORMAR UNA BASE, SE TIENE QUE

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \left|\begin{matrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}\right. \iff \left|\begin{matrix} 5\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}\right. \iff$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

AHORA V TIENE DIMENSIÓN 3 YA QUE $\{v_1\ v_2\ v_3\}$ ES UNA BASE. POR EL TEOREMA DE LA BASE, TRES VECTORES (continuación de **2.-** ...) LI REALMENTE INDEPENDIENTES, COMO

$\{u_1, u_2, u_3\}$, TAMBIÉN FORMA UNA BASE.

3.- Se considera el **sistema homogéneo:**

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,m}x_m & = & 0 \end{array}\right\} (*).$$

Consideramos el conjunto S de las soluciones del sistema. Prueba que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

SEA $S = \{(x_1, x_2 \dots x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \dots x_m$ SOLUCIÓN DEL SISTEMA $(*)\}$

PARA VER QUE $S \subseteq \mathbb{R}^m$ ES UN SUBESPACIO VECTORIAL HAY QUE TOMAR $x, y \in \mathbb{R}^m$ Y $\lambda \in \mathbb{R}$ Y VER QUE $\lambda x + y \in S$.

SEA $x = (x_1 \dots x_m)$ TAL QUE $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \quad + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdot + a_{1m}x_m = 0 \end{array}\right.$

SEA $y = (y_1 \dots y_m)$ TAL QUE $\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + \quad \cdot + a_{1m}y_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{nm}y_m = 0 \end{array}\right.$

AHORA $\left.\begin{array}{l} a_{11}(\lambda x_1 + y_1) + \dots + a_{1m}(\lambda x_m + y_m) \\ \vdots \\ a_{n1}(\lambda x_1 + y_1) + \dots + a_{nm}(\lambda x_m + y_m) \end{array}\right\} \iff$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\,[\underbrace{a_{11}x_1 + \dots a_{1m}x_m}_{=0}] + [\underbrace{a_{11}y_1 + \dots + a_{1m}y_m}_{=0}] = 0 \\ \vdots \\ \lambda\,[\underbrace{a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m}_{=0}] + [\underbrace{a_{n1}y_1 + \dots + a_{nm}y_m}_{=0}] = 0 \end{array}\right.$$

LUEGO $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \dots, \lambda x_m + y_m) \in S$.