# ÁLGEBRA PRÁCTICA-5

**Nombre y apellidos**..................................................................

**1.-** En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$S = \{(x,y,z,t) \ : \ x+y+z=0; \ z+t=0\}$ y $S' = \{(\lambda+\mu, \lambda+2\mu, \lambda+3\mu, \lambda+\mu) \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

$1_1$.- Encuentra una base de $S$ y otra de $S'$.

$$S: \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ z+t=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -y+t \\ y = y \\ z = -t \\ t = t \end{array} \right. \quad \text{LUEGO}$$

$$S = L[\underbrace{(-1,1,0\,0)\ (1,0,-1,1)}_{\text{BASE; SON INDEPENDIENTES}}]$$

$$S' = \{\lambda(1,1,1,1)+\mu(1,2,3,1) : \lambda\mu \in \mathbb{R}\} = L[\underbrace{(1,1,2,1),\ (1,2,3,1)}_{}]$$

BASE, YA QUE SON INDEPENDIENTES

$1_2$.- Encuentra bases para $S \cap S'$ y $S+S'$.

$S+S'$: $(1,1,1,1) \neq \lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(1,0,-1,1)$

YA QUE $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y $1 \neq -\lambda_1+\lambda_2$

POR OTRO LADO

$(1,2,3,1) = \lambda_1(-1,1,0\,0)+\lambda_2(1,0,-1,1)+\lambda_3(1,1,1,1)$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ 2 = \lambda_1 \quad\quad +\lambda_3 \\ 3 = \quad -\lambda_2+\lambda_3 \\ 1 = \quad\ \lambda_2+\lambda_3 \end{array} \right\} \quad \text{RESOLVEMOS Y } \lambda_1 = 0,\ \lambda_3 = 2 \text{ y } \lambda_2 = -1$$

ASÍ $S+S' = L[\underbrace{(-1,1,0,0),\ (1,0,-1,1)\ (1,1,1,1)}_{}]$

BASE YA QUE SON INDEPENDIENTES

$S \cap S'$

$$S' \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda+\mu \\ y = \lambda+2\mu \\ z = \lambda+3\mu \\ t = \lambda+\mu. \end{array} \right. \quad \frac{z-t}{2} = \mu \ \text{ y } \ \lambda = t - \frac{z-t}{2} = \frac{3t-z}{2} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3t-z}{2} + \frac{z-t}{2} \\ y = \frac{3t-z}{2} + (z-t) \\ \text{ECUACIONES IMPLÍCITAS DE } S' \end{array}}$$

ASÍ $S \cap S'$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ z+t=0 \end{array} \right\} S \\ \left. \begin{array}{r} x-t=0 \\ 2y-z-t=0 \end{array} \right\} S' \end{array} \right.$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA

$$S \cap S' = L[(1,0,-1,1)]$$

$1_3$.- Calcula $dim S+S' =$ $\dim S + \dim S' - \dim S\cap S' =$
$= 2+2-1 = 3$

OBSERVEMOS EN $1_2$ YA SABÍAMOS ESTO PARA QUE UNA BASE DE $S+S'$ TIENE TRES ELEMENTOS

$1_4$.- Encuentra ecuaciones implícitas de $S'$ y de $S \cap S'$.

USANDO EL APARTADO ANTERIOR

$$S' \left| \begin{array}{l} x \quad\quad -t = 0 \\ 2y-z-t = 0 \end{array} \right. \qquad S \cap S' \left| \begin{array}{l} x+y+z = 0 \\ x \quad\quad -t = 0 \\ 2y-z-t = 0 \end{array} \right.$$

(QUITAMOS $z+t=0$, PUES ES COMBINACIÓN LINEAL DE LAS OTRAS TRES)

**2.-** En $\mathbb{R}^3$ tenemos dos bases $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$.

$2_1$.- Calcula las coordenadas del vector $v = (1,2,1)$ respecto de la base $B$.

$$(1,2,1) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,1,1) \iff \left\{\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 \\ 2 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_3 \end{array}\right.$$

ASÍ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ SON LAS COORDENADAS BUSCADAS

$2_2$.- Calcula la **matriz de paso** del cambio de coordenadas de la base $B$ a la base $B'$.

VAMOS A ESCRIBIR LOS VECTORES DE B COMO COMBINACIÓN LINEAL DE LOS VECTORES DE B'

$$(1,0,0) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(0,0,1) \iff \left\{\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}\right.$$

ASÍ $\lambda = 1$, $\lambda_2 = -1$ Y $\lambda_3 = -1$, COORDENADAS DE $(1,0,0)$ EN LA BASE B'

$$(0,1,0) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(0,0,1) \iff \left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}\right.$$

ASÍ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ Y $\lambda_3 = 1$ COORDENADAS DE $(0,1,0)$ EN LA BASE B'

$$(0,1,1) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,-1), \lambda_3(0,0,1) \iff \left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = -\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}\right.$$

ASÍ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ Y $\lambda_3 = 2$ COORDENADAS DE $(0,1,1)$ EN B'

LUEGO LA MATRIZ DE PASO SE ESCRIBE PONIENDO POR ORDEN Y EN COLUMNAS LAS COORDENADAS ANTERIORES

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$2_3$.- aplica $2_2$ para calcular las coordenadas de $v$ respecto de la base $B'$

$v = (1,2,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,1,1).$

Y ASÍ

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y SE TIENE QUE

$v = (1,2,1) = 1(1,1,0) + 1(0,1,-1) + 2(0,0,1).$