ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES. SOLUCIONES EXPLÍCITAS.

En el caso de E.D.O. lineales de coeficientes constantes es posible dar con las soluciones explícitas. Comenzamos viendo como se calcula una base de soluciones para el problema homogéneo.

Definición 1. *Dada una E.D.O. lineal homogénea de coeficientes constantes:*

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,$$

con $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$, se llama ***ecuación característica*** *asociada a la E.D.O. a la ecuación polinómica:*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Al polinomio $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$, se le llama polinomio característico.

El nombre de **ecuación característica** es conocido. Esta ecuación sirve para calcular los autovalores de una matriz. Al final del tema veremos el por qué de esta coincidencia, que no lo es.

Teorema 1. *Sea una E.D.O. lineal homogénea de coeficientes constante:*

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Si λ es una solución de la ecuación característica, entonces $y(t) = e^{\lambda t}$ es una solución de la E.D.O.

Demostración: Tomando la función $y(t) = e^{\lambda t}$ y derivando:

$$\begin{array}{ccc} y(t) & = & e^{\lambda t} \\ y'(t) & = & \lambda e^{\lambda t} \\ \vdots & & \\ y^{n)}(t) & = & \lambda^n e^{\lambda t} \end{array} ;$$

ahora entrando en la ecuación

$$y^{n)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + ... + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} =$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0) = 0$$

donde la última igualdad se da por ser λ una raíz de la ecuación característica $\square$

Corolario 1. *Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son n raíces distintas de la ecuación característica*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$$

de la E.D.O. lineal homogénea

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,$$

entonces la solución general de la E.D.O. es

$$y(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + ... + K_n e^{\lambda_n t}$$

donde $K_1, K_2, ..., K_n \in \mathbb{R}$.

Demostración: Por el Teorema anterior sabemos que las funciones $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}$ son soluciones de la E.D.O. Por lo visto dos lecciones atrás, estas funciones son linealmente independientes. Por otro lado el Teorema de Estructura nos dice que la dimensión de S, el subespacio vectorial de las soluciones de la E.D.O., es precisamente n. Luego $\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t} \}$ forma una base de S. Así todo $y \in S$ es una combinación lineal de los elementos de la base

$$y(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + ... + K_n e^{\lambda_n t} \qquad \square$$

Lo que no podemos esperar es que una ecuación polinómica tenga tantas raíces diferentes como su grado. Ni siquiera que sean reales. Así tenemos que:

Teorema 2. *Sea una E.D.O. lineal homogénea de orden n y de coeficientes constante:*

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ son las raíces distintas de la ecuación característica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

con multiplicidades $s_1, s_2, ..., s_r \in \mathbb{N}$ respectivamente, entonces

$$\{ \ e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, ..., t^{s_1 - 1}e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, ...t^{s_r - 1}e^{\lambda_r t}, \ \}$$

forma una base del conjunto de soluciones S de la E.D.O. y por tanto la solución general de la E.D.O. es

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{s_i - 1} K_{i,j} t^j e^{\lambda_i t},$$

donde $K_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Demostración: La ecuación característica $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$, por tener grado n, tiene n raíces (esencialmente esto es el Teorema Fundamental del Álgebra). Estas raíces no tienen que ser iguales, aunque la suma de multiplicidades

$$s_1 + s_2 + ... + s_r = n.$$

Por otro lado, sabemos que las n funciones

$$\{\ t^j e^{\lambda_i t} \quad : \quad i = 1, ..., r; j = 0, 1, ..., s_i - 1\ \}$$

son linealmente independientes. Si probamos que cada una de ella es una solución de la E.D.O. habremos terminado, ya que $dimS = n$ (Teorema de Estructura).

Para ver que las funciones $\{t^j e^{\lambda_i t}\}$ son soluciones de la E.D.O., nos fijamos en que la ecuación característica se puede escribir como

$$(\lambda - \lambda_1)^{s_1}(\lambda - \lambda_2)^{s_2}....(\lambda - \lambda_r)^{s_r} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Vamos a detener aquí la prueba, para introducir una notación que nos permite descomponer la E.D.O. en forma similar a como hemos descompuesto el polinomio característico y que nos va a permitir concluir la demostración $\square$

Vamos a escribir

$$Dy = y'.$$

En particular podemos ver D como una aplicación que transforma una función en su derivada. De forma precisa

Definición 2. *Sea $C^n([t_1, t_2])$ el espacio vectorial de las funciones n veces derivables sobre el intervalo $[t_1, t_2]$. Se definen las siguiente aplicaciones lineales*

A:

$$\begin{array}{ccccccc} D & : & C^n([t_1,t_2]) & \to & C([t_1,t_2]) & & \\ & & y & \to & Dy & = & y' \end{array}$$

B: *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{array}{ccccccc} D-\alpha & : & C^n([t_1,t_2]) & \to & C([t_1,t_2]) & & \\ & & y & \to & (D-\alpha)y & = & y'-\alpha y \end{array}.$$

Ejercicio 1. *Prueba que efectivamente D y $D - \alpha$ son aplicaciones lineales.*

Notación: Teniendo en cuenta la composición de aplicaciones escribimos

$$D^j = D \circ D \circ D \circ ...... \circ D \qquad (j - \text{veces}).$$

Así, $D^j y = y^{j)}$, la j-ésima derivada. Además notamos

$$(D - \alpha)(D - \beta) = (D - \alpha) \circ (D - \beta)$$

Ejercicio 2. *Prueba que, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\,(o\ \mathbb{C})$*, se tiene que*

- $(D-\alpha)(D-\beta)y = (D-\beta)(D-\alpha)y$*, para todo* $y \in C^n([t_1,t_2])$*;*
- $(D-\alpha)^2 y = D^2y - 2\alpha Dy + \alpha^2 y$*, para todo* $y \in C^n([t_1,t_2])$*.*
- $$(D-\alpha)^n y = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \alpha^{n-k} D^k y,$$
  para todo $y \in C^n([t_1,t_2])$ *(usa inducción).*

Con esta notación, podemos reescribir la E.D.O lineal de orden n. Dada

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

se puede escribir por como

$$D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + ... + a_1 Dy + a_0 y =$$

y por linealidad

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y = 0.$$

Como la ecuación característica se puede descomponer de la forma

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 =$$

$$(\lambda-\lambda_1)^{s_1}(\lambda-\lambda_2)^{s_2}....(\lambda-\lambda_r)^{s_r} = 0,$$

usando el Ejercicio anterior se pruede escribir que

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0) = (D-\lambda_1)^{s_1}(D-\lambda_2)^{s_2}....(D-\lambda_r)^{s_r}.$$

El álgebra de los polinomios en "λ" es igual a la que tenemos con las expresiones en "D".

Demostración: (continuación de la prueba del **Teorema 2.**) Si y es solución de la E.D.O.

$$(D-\lambda_i)^{s_i} = 0,$$

entonces también es solución de la E.D.O.

$$(D-\lambda_1)^{s_1}(D-\lambda_2)^{s_2}....(D-\lambda_r)^{s_r} = 0,$$

ya que por la propiedad conmutativa que hemos visto en el Ejercicio 2 podemos escribir

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y = (D-\lambda_1)^{s_1}(D-\lambda_2)^{s_2}....(D-\lambda_r)^{s_r}y =$$

$$(D-\lambda_1)^{s_1}...(D-\lambda_{s-1})^{s_{i-1}}(D-\lambda_{s+1})^{s_{i+1}}....(D-\lambda_r)^{s_r}(D-\lambda_i)^{s_i}y = 0.$$

Ya solo nos queda ver que $\{e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, ..., t^{s_i-1}e^{\lambda_i t}\}$ son s_i soluciones de la E.D.O.

$$(D-\lambda_i)^{s_1}y = 0.$$

Esto último lo vamos a hacer por inducción sobre $s_i \in \mathbb{N}$.

- Si $s_i = 1$, entonces claramente $e^{\lambda_i t}$ es solución de la E.D.O. de primer orden
$$(D - \lambda_i)y = 0.$$
- Supongamos que $\{e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, ..., t^{s_i-2}e^{\lambda_i t}\}$ son $s_i - 1$ soluciones de la E.D.O.
$$(D - \lambda_i)^{s_i-1}y = 0.$$
- Como
$$0 = (D - \lambda_i)^{s_i}y = (D - \lambda_i)(D - \lambda_i)^{s_i-1}y = (D - \lambda_i)^{s_i-1}(D - \lambda_i)y,$$
$\{e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, ..., t^{s_i-2}e^{\lambda_i t}\}$ son soluciones de esta E.D.O de orden s_i. Además
$$(D - \lambda_i)^{s_i}(t^{s_i-1}e^{\lambda_i t}) = (D - \lambda_i)^{s_i-1}(D - \lambda_i)(t^{s_i-1}e^{\lambda_i t}) =$$
$$(D - \lambda_i)^{s_i-1}(\, D(t^{s_i-1}e^{\lambda_i t}) - \lambda_i t^{s_i-1}e^{\lambda_i t}\,) =$$
derivando
$$(D - \lambda_i)^{s_i-1}(\, (s_i - 1)t^{s_i-2}e^{\lambda_i t}\,) = (s_i - 1)(D - \lambda_i)^{s_i-1}(\, t^{s_i-2}e^{\lambda_i t}\,) = 0,$$
donde hemos usado la linealidad de las aplicaciones y en la última igualdad la hipótesis de inducción $\square$

Ejemplos 1.

- $y'' - 3y + 2y = 0$. *Su ecuación característica es*
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0,$$
que tiene a $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ por raíces simples. Por tanto la solución general de la E.D.O. es
$$y(x) = K_1e^x + K_2e^{2x} \qquad \textit{para} \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$
- $x'''(t) - x'(t) = 0$. *Su ecuación característica es*
$$\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0,$$
que tiene por raíces simples a $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Por tanto la solución general de la E.D.O. es
$$x(t) = K_1 + K_2e^t + K_3e^{-t} \qquad \textit{para} \qquad K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}.$$
- $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. *Su ecuación característica es*
$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0,$$
que tiene a $\lambda = 1$ por raíz de multiplicidad 3. Por tanto la solución general de la E.D.O. es
$$y(t) = K_1e^t + K_2te^t + K_3t^2e^t \qquad \textit{para} \qquad K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}.$$

Lema 1. *Sea una E.D.O. lineal de orden* n *y coeficientes constantes*

$$y^{n)}(t)+a_{n-1}y^{n-1)}(t)+....+a_1y'(t)+a_0y(t)=0.$$

Si $\lambda_1,...,\lambda_r$ *son las raíces distintas de la Ecuación Característica con multiplicidades* $s_1,...,s_r$ *respectivamente, así*

$$y^{n)}(t)+a_{n-1}y^{n-1)}(t)+....+a_1y'(t)+a_0y(t)=0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Pi_{i=1}^{r}(D-\lambda_i)^{s_i}y(t)=0,$$

entonces el cambio de variable

$$y(t)=e^{\lambda t}z(t)$$

transforma la ecuación en

$$\Pi_{i=1}^{r}(D-(\lambda_i-\lambda))^{s_i}z(t)=0.$$

Demostración: **Ejercicio** □

¿Que ocurre si las raíces de la ecuación característica son números complejos? Lo vemos en la siguiente lección.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es