

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES. RAÍCES COMPLEJAS.

Antes de seguir será conveniente leer algo sobre números complejos y funciones de variable compleja (ver el Apéndice sobre Funciones de Variable Compleja).

Dada una E.D.O. lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0,$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Si λ es un raíz de la ecuación característica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

de multiplicidad s , entonces el Teorema 1 de la lección anterior nos dice que $e^{\lambda t}$ es una solución de la E.D.O. (el Teorema 2 nos dice más, que $t^j e^{\lambda t}$ es solución para todo $j = 0, 1, \dots, s-1$).

Las prueba de estos Teoremas no dependen de que λ sea real o complejo. Solo se usa que

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t},$$

lo cuál es cierto para la exponencial real como para la exponencial compleja (ver Apéndice sobre Complejos).

Ahora, si $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, entonces

$$e^{\alpha}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$$

es una solución de la E.D.O (ver la **Fórmula de Euler** en el Apéndice sobre Complejos). Ahora como los coeficientes de la ecuación característica son reales, ocurre que el conjugado de λ también es raíz:

$$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$$

es raíz de multiplicidad s de la ecuación característica (ver Apéndice sobre Complejos). Y así

$$e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)$$

es solución de la E.D.O. (pero también $t^j e^{\bar{\lambda} t}$ es solución para todo $j = 0, 1, \dots, s-1$).

Por último, como $\lambda \neq \bar{\lambda}$ (si $\beta \neq 0$), se tiene que las funciones:

$$e^{\lambda t}, \dots, t^j e^{\lambda t}, \dots, t^{s-1} e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}, \dots, t^{s-1} e^{\bar{\lambda} t}$$

son soluciones linealmente independientes de la E.D.O. (observa que lo que vimos de independencia lineal de funciones es independiente del cuerpo en el que trabajemos). Como la suma y producto por escalares de soluciones de una E.D.O. lineal da otra solución y por la independencia lineal de vectores (ver Álgebra Lineal) se sigue que las funciones:

$$\frac{t^j e^{\lambda t} + t^j e^{\bar{\lambda} t}}{2} = t^j e^{\alpha t} \cos \beta t$$

y

$$\frac{t^j e^{\lambda t} - t^j e^{\bar{\lambda} t}}{2i} = t^j e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

$j = 0, 1, \dots, s-1$, son $2s$ soluciones linealmente independientes de la E.D.O.

Lo anterior junto con la lección previa se resume en el siguiente Teorema.

Teorema 1. (Solución General de una E.D.O. lineal homogénea de orden n y coeficientes constantes). Sea la E.D.O. lineal

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Si

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r$$

son las **raíces reales** distintas de la ecuación característica de multiplicidades $s_1, \dots, s_r$. Y

$$\lambda_{r+1}, \overline{\lambda_{r+1}}, \dots, \lambda_{r+v}, \overline{\lambda_{r+v}}$$

son las **raíces complejas** distintas de la ecuación característica de multiplicidades $s_{r+1}, \dots, s_{r+v}$ ($\lambda_{r+1} = \alpha_1 + \beta_1 i$ con multiplicidad $s_{r+1} \dots$ etc), entonces la **Solución General** de la E.D.O. viene dada por

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{s_i-1} K_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} +$$

$$\sum_{k=1}^v \sum_{j=0}^{s_{r+k}-1} C_{k,j} t^j e^{\alpha_k} \cos \beta_k t + D_{k,j} t^j e^{\alpha_k} \sin \beta_k t,$$

donde $K_{i,j}, C_{k,j}, D_{k,j} \in \mathbb{R}$.

Ejemplos 1. Hay que calcular la Solución General de las siguientes E.D.O.

■ $y'' + 4y' + 5y = 0.$

Planteamos la ecuación característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ cuya solución es

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Dado que tenemos dos raíces complejas conjugadas la solución general es

$$y(t) = K_1 e^{-2t} \cos t + K_2 e^{-2t} \sin t \quad \text{para todo} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Observemos que como la parte real de las raíces $\lambda = -2 \pm i$ es negativa, entonces todas las soluciones tienden a cero cuando t se hace grande,

■ $x^{(4)} + 2x'' + x = 0.$

La ecuación característica es $0 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2$, luego $\lambda = \pm i$ son dos raíces complejas conjugadas dobles. La solución general de la E.D.O. es

$$x(t) = K_1 \cos t + K_2 t \cos t + K_3 \sin t + K_4 t \sin t$$

para todo $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{R}.$

Observemos que cuando $K_2 = K_4 = 0$ tenemos soluciones acotadas. Si no las soluciones son oscilantes.

■ $y'' + a^2 y = 0.$

La ecuación característica es: $\lambda^2 + a^2 = 0.$ Las raíces de esta ecuación son complejas conjugadas $\lambda = \pm ai.$ La solución genral es, por tanto,

$$y(t) = K_1 \cos at + K_2 \sin at \quad \text{para todo} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

En este caso, todas las soluciones son acotadas.

Observación 1. En los ejemplos anteriores y en el Teorema anterior, se ve que las **raíces** de la ecuación característica nos dan información sobre el **comportamiento de las soluciones** de la E.D.O..