

SOLUCIÓN DE LA E.D.O. LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA

Dada la E.D.O. **no** homogénea

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = f(t) \quad (1),$$

encontrar la **solución general** de esta ecuación, con lo que ya sabemos, se reduce a encontrar una **solución particular**. Vamos a presentar tres modos de hallar esta solución particular.

1. Usando la **Transformada de Laplace**. Es un método alternativo que nos permite resolver el problema de Cauchy asociado a la ecuación (1). Este procedimiento lo veremos en el tema siguiente.
2. Usando el **método de Variación de las Constantes**. Teóricamente siempre funciona, pero puede ser un poco largo.
3. Para ciertos términos independientes "f" se puede **ensayar** cierto tipo de soluciones particulares.

Los tres métodos los vamos a ver en orden inverso a como los hemos presentando. Veamos el método de **ensayo**.

Proposición 1. *Si el término independiente f de la E.D.O. (1) es del tipo*

$$f(t) = e^{at} [P_l(t) \cos bt + Q_q(t) \operatorname{sen} bt]$$

donde P_l y Q_q son dos polinomios de grados l y q respectivamente, entonces una solución particular y_0 de la ecuación (1) es del tipo

$$y_0(t) = t^r e^{at} [\widetilde{P}_k(t) \cos bt + \widetilde{Q}_k(t) \operatorname{sen} bt]$$

donde \widetilde{P}_k y \widetilde{Q}_k son dos polinomios de grado $k = \max\{l, q\}$ y donde r es la multiplicidad de la raíz $\lambda = a + bi$ de la ecuación característica de (1) ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$). Esta multiplicidad r solo puede ser 0, 1 o 2.

Observemos que si $a + bi$ no es raíz de la ecuación característica, entonces $r = 0$. Si lo es y $b \neq 0$, entonces $r = 1$. Si $b = 0$ y a es raíz, entonces $r = 1$ o $r = 2$. Es posible también que algunos elementos de los que aparecen en la definición de f sean nulos, como P_l o Q_q . O que sean de grado 0 y se reduzcan a constantes.

Veamos algunos ejemplos de como se aplica la proposición anterior.

Ejemplo 1. *Dada la ecuación $y'' - y' - 5y = 1$, vamos a encontrar una solución particular.*

Solución: En este caso $f(t) = 1$ (es decir, $a = 0$, $b = 0$, $P_l = 1$ y $Q_q = 0$; además 0 no es raíz de la ecuación característica). Tenemos que ensayar una solución del tipo $y_0 = A$ constante. Así entrando en la ecuación diferencial

$$-5y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{-1}{5}.$$

Ejemplo 2. Dada la ecuación $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$, vamos a encontrar una solución particular.

Solución: En este caso $f(t) = 3 \operatorname{sen} x$ (es decir, $a = 0$, $b = 1$, $P_l = 0$ y $Q_q = 3$; además i no es raíz de la ecuación característica $\lambda^2 + 4\lambda = 0$). Luego la proposición anterior nos pide ensayar una solución particular del tipo

$$y_0(x) = A \operatorname{sen} x, \quad y_0'(x) = A \cos x \quad \text{y} \quad y_0''(x) = -A \operatorname{sen} x.$$

Entrando y_0 en la ecuación diferencial

$$-A \operatorname{sen} x + 4A \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} x;$$

se deduce que $A = 1$ y por tanto $y_0(x) = \operatorname{sen} x$ es la solución particular buscada.

Ejemplo 3. Dada la ecuación $x'' + a_1x' + a_2x = \cos bt$, vamos a encontrar una solución particular. Al hacerlo de modo genérico, vamos a dar una prueba de la proposición anterior en el caso particular de que $f(t) = \cos bt$.

Solución: Nos van a salir dos casos.

Si bi no es raíz de la ecuación característica. En este caso probaremos una solución particular del tipo

$$\begin{aligned} y_0(t) &= A \cos bt + B \operatorname{sen} bt \\ y_0'(t) &= -Ab \operatorname{sen} bt + Bb \cos bt \\ y_0''(t) &= -Ab^2 \cos bt - Bb^2 \operatorname{sen} bt \end{aligned}$$

Así, entrando en la ecuación diferencial con y_0 tenemos que

$$b^2(-A \cos bt - B \operatorname{sen} bt) + ba_1(-A \operatorname{sen} bt + B \cos bt) + a_2(A \cos bt + B \operatorname{sen} bt) = \cos bt$$

simplificando y reordenando

$$(-b^2A + ba_1B + a_2A) \cos bt + (-b^2B - ba_1A + a_2B) \operatorname{sen} bt = \cos bt.$$

De esto se deduce que

$$(*) \begin{cases} (a_2 - b^2)A + ba_1B = 1 \\ -ba_1A + (a_2 - b^2)B = 0. \end{cases}$$

Este sistema, con incógnitas A y B , tiene solución única ya que el determinante de los coeficientes

$$(**) \begin{vmatrix} (a_2 - b^2) & ba_1 \\ -ba_1 & (a_2 - b^2) \end{vmatrix} = (a_2 - b^2)^2 + (ba_1)^2 \neq 0$$

Lo que nos permite hallar A y B y por tanto la solución particular y_0 buscada.

El determinante $(**)$ no es nulo ya que si lo fuese tendríamos que $a_2 - b^2 = 0$ y que $ba_1 = 0$. Y tendríamos que

$$(bi)^2 + a_1(bi) + a_2 = (a_2 - b^2) + a_1bi = 0,$$

luego bi sería una raíz de la ecuación característica ¡que no es el caso!

Si bi es raíz de la ecuación característica. En este caso

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - bi)(\lambda + bi) = \lambda^2 + b^2$$

por tanto $a_1 = 0$ y $a_2 = b^2$. Ahora entrando en la ecuación con una solución particular del tipo

$$y_0(t) = t(A \cos bt + B \operatorname{sen} bt)$$

se llega a un sistema parecido a $(*)$ que tiene solución única (hay que tener en cuenta que $a_1 = 0$ y $a_2 = b^2$).

Ejemplo 4. Dada la ecuación $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \frac{t}{2}$, vamos a encontrar una solución general de esta ecuación no homogénea.

Antes de resolver el problema vamos a ver un resultado que nos permite simplificarlo.

Proposición 2. Si tenemos una E.D.O. del tipo

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(t) \quad (3)$$

donde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ para todo $n = 1, 2, \dots, N$, y si para cada n encontramos una solución particular y_n del problema

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = f_n(t),$$

entonces $y_0(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n(t)$ es una solución particular del problema (3).

Demostración:

$$\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n y_n(t)\right)'' + a_1 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n y_n(t)\right)' + a_2 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n y_n(t)\right)'' \\ \sum_{n=1}^N \alpha_n (y_n''(t) + a_1 y_n'(t) + a_2 y_n(t)) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(t) \square$$

Solución: Empecemos con el último ejemplo. La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Luego $\lambda = 2$ es una raíz real doble. Así la solución general de la ecuación homogénea es

$$x(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora vamos a encontrar una solución particular para cada uno de los problemas no homogéneos

- $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$ y
- $y'' - 4y' + 4y = t$.

En el primer caso, como $a = 2$ es una raíz doble de la ecuación característica, ensayamos una solución particular del tipo

$$y_1(t) = t^2 K e^{2t} \quad y_1'(t) = 2tK e^{2t} + t^2 2K e^{2t} \quad y \quad y_1''(t) = 2K e^{2t} + 8tK e^{2t} + t^2 4K e^{2t},$$

y así entrando en la ecuación

$$2K e^{2t} + 8tK e^{2t} + t^2 4K e^{2t} - 4(2tK e^{2t} + t^2 2K e^{2t}) + 4(t^2 K e^{2t}) \\ = 2K e^{2t} = e^{2t}$$

de lo que deducimos que $K = \frac{1}{2}$ y por tanto $y_1(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t}$.

En el segundo caso, como $a = 0$ **no** es una raíz de la ecuación característica, ensayamos una solución particular del tipo

$$y_2(t) = K_1 t + K_2 \quad y_2'(t) = K_1 \quad y \quad y_2''(t) = 0,$$

y así entrando en la ecuación

$$-4K_1 + 4(K_1 t + K_2) = 4K_1 t + (4K_2 - 4K_1) = t$$

de lo que deducimos que $K_1 = \frac{1}{4}$ y que $K_2 = \frac{1}{4}$ y por tanto $y_2(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$.

De la proposición anterior tenemos que

$$y_0(t) = 2y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = t^2 e^{2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}$$

es una solución particular del problema $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \frac{t}{2}$. Y su solución general es

$$y(t) = t^2e^{2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{8} + Ae^{2t} + Bte^{2t} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`