SOLUCIÓN DE LA E.D.O. LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA

Dada la E.D.O. **no** homogénea

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \qquad (1),$$

encontrar la **solución general** de esta ecuación, con lo que ya sabemos, se reduce a encontrar una **solución particular**. Vamos a presentar tres modos de hallar esta solución particular.

1. Usando la **Transformada de Laplace**. Es un método alternativo que nos permite resolver el problema de Cauchy asociado a la ecuación (1). Este procedimiento lo veremos en el tema siguiente.
2. Usando el **método de Variación de las Constantes**. Teóricamente siempre funciona, pero puede ser un poco largo.
3. Para ciertos términos independientes "f"se puede **ensayar** cierto tipo de soluciones particulares.

Los tres métodos los vamos a ver en orden inverso a como los hemos presentando. Veamos el método de **ensayo**.

Proposición 1. *Si el término independiente f de la E.D.O. (1) es del tipo*

$$f(t) = e^{at}\left[P_l(t)\cos bt + Q_q(t)\operatorname{sen} bt\right]$$

donde P_l y Q_q son dos polinomios de grados l y q respectivamente, entonces una solución particular y_0 de la ecuación (1) es del tipo

$$y_0(t) = t^r e^{at}\left[\widetilde{P_k}(t)\cos bt + \widetilde{Q_k}(t)\operatorname{sen} bt\right]$$

donde $\widetilde{P_k}$ y $\widetilde{Q_k}$ son dos polinomios de grado $k = \max\{l, q\}$ y donde r es la multiplicidad de la raíz $\lambda = a + bi$ de la ecuación característica de (1) ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$). Esta multiplicidad r solo puede ser $0, 1$ o 2.

Observemos que si $a + bi$ no es raíz de la ecuación característica, entonces $r = 0$. Si lo es y $b \neq 0$, entonces $r = 1$. Si $b = 0$ y a es raíz, entonces $r = 1$ o $r = 2$. Es posible también que algunos elementos de los que aparecen en la definición de f sean nulos, como P_l o Q_q. O que sean de grado 0 y se reduzcan a constantes.

Veamos algunos ejemplos de como se aplica la proposición anterior.

Ejemplo 1. *Dada la ecuación $y'' - y' - 5y = 1$, vamos a encontar una solución particular.*

Solución: En este caso $f(t) = 1$ (es decir, $a = 0$, $b = 0$, $P_l = 1$ y $Q_q = 0$; además 0 no es raíz de la ecuación característica). Tenemos que ensayar una solución del tipo $y_0 = A$ constante. Así entrando en la ecuación diferencial

$$-5y_0 = 1 \qquad \Rightarrow y_0 = \frac{-1}{5}.$$

Ejemplo 2. *Dada la ecuación $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$, vamos a encontar una solución particular.*

Solución: En este caso $f(t) = 3 \operatorname{sen} x$ (es decir, $a = 0$, $b = 1$, $P_l = 0$ y $Q_q = 3$; además i no es raíz de la ecuación característica $\lambda^2 + 4\lambda = 0$). Luego la proposición anterior nos pide ensayar una solución particular del tipo

$$y_0(x) = A \operatorname{sen} x, \qquad y_0'(x) = A \cos x \qquad \text{y} \qquad y_0''(x) = -A \operatorname{sen} x.$$

Entrando y_0 en la ecuación diferencial

$$-A \operatorname{sen} x + 4A \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} x;$$

se deduce que $A = 1$ y por tanto $y_0(x) = \operatorname{sen} x$ es la solución particular buscada.

Ejemplo 3. *Dada la ecuación $x'' + a_1 x' + a_2 x = \cos bt$, vamos a encontar una solución particular. Al hacerlo de modo genérico, vamos a dar una prueba de la proposición anterior en el caso particular de que $f(t) = \cos bt$.*

Solución: Nos van a salir dos casos.

Si bi **no es raíz de la ecuación característica.** En este caso probaremos una solución particular del tipo

$$\begin{aligned} y_0(t) &= A \cos bt + B \operatorname{sen} bt \\ y_0'(t) &= -Ab \operatorname{sen} bt + Bb \cos bt \\ y_0''(t) &= -Ab^2 \cos bt - Bb^2 \operatorname{sen} bt \end{aligned}$$

Así, entrando en la ecuación diferencial con y_0 tenemos que

$$b^2(-A \cos bt - B \operatorname{sen} bt) + ba_1(-A \operatorname{sen} bt + B \cos bt) + a_2(A \cos bt + B \operatorname{sen} bt) = \cos bt$$

simplificando y reordenando

$$(-b^2 A + ba_1 B + a_2 A) \cos bt + (-b^2 B - ba_1 A + a_2 B) \operatorname{sen} bt = \cos bt.$$

De esto se deduce que

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a_2 - b^2)A & + & ba_1 B & = & 1 \\ -ba_1 A & + & (a_2 - b^2)B & = & 0. \end{array} \right.$$

Este sistema, con incógnitas A y B, tiene solución única ya que el determinante de los coeficientes

$$(**)\begin{vmatrix} (a_2-b^2) & ba_1 \\ -ba_1 & (a_2-b^2) \end{vmatrix} = (a_2-b^2)^2+(ba_1)^2 \neq 0$$

Lo que nos permite hallar A y B y por tanto la solución particular y_0 buscada.
El determinante $(**)$ no es nulo ya que si lo fuese tendríamos que $a_2-b^2=0$ y que $ba_1=0$. Y tendríamos que

$$(bi)^2+a_1(bi)+a_2=(a_2-b^2)+a_1bi=0,$$

luego bi sería una raíz de la ecuación característica ¡que no es el caso!

Si bi es raíz de la ecuación característica. En este caso

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=(\lambda-bi)(\lambda+bi)=\lambda^2+b^2$$

por tanto $a_1=0$ y $a_2=b^2$. Ahora entrando en la ecuación con una solución particular del tipo

$$y_0(t)=t(A\cos bt+B\operatorname{sen} bt)$$

se llega a un sistema parecido a $(*)$ que tiene solución única (hay que tener en cuenta que $a_1=0$ y $a_2=b^2$).

Ejemplo 4. *Dada la ecuación $y''-4y'+4y=2e^{2t}+\frac{t}{2}$, vamos a encontar una solución general de esta ecuación no homogénea.*

Antes de resolver el problema vamos a ver un resultado que nos permite simplificarlo.

Proposición 2. *Si tenemos una E.D.O. del tipo*

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n(t) \qquad (3)$$

donde $\alpha_n\in\mathbb{R}$ para todo $n=1,2,..,N$, y si para cada n encontramos una solución particular y_n del problema

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=f_n(t),$$

entonces $y_0(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\alpha_n y_n(t)$ es una solución particular del problema (3).

Demostración:

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n y_n(t)\right)'' + a_1\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n y_n(t)\right)' + a_2\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n y_n(t)\right)''$$
$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(y_n''(t) + a_1 y_n'(t) + a_2 y_n(t)) = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n(t)\square$$

Solución: Empecemos con el último ejemplo. La ecuación característica de la ecuación homogenéa es

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Luego $\lambda = 2$ es una raíz real doble. Así la solución general de la ecuación homogénea es

$$x(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora vamos a encontrar una solución particular para cada uno de los problemas no homogéneos

- $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$ y
- $y'' - 4y' + 4y = t.$

En el primer caso, como $a = 2$ es una raíz doble de la ecuación característica , ensayamos una solución particular del tipo

$$y_1(t) = t^2Ke^{2t} \quad y_1'(t) = 2tKe^{2t}+t^2 2Ke^{2t} \quad \text{y} \quad y_1''(t) = 2Ke^{2t}+8tKe^{2t}+t^2 4Ke^{2t},$$

y así entrando en la ecuación

$$2Ke^{2t} + 8tKe^{2t} + t^2 4Ke^{2t} - 4(2tKe^{2t} + t^2 2Ke^{2t}) + 4(t^2Ke^{2t})$$
$$= 2Ke^{2t} = e^{2t}$$

de lo que deducimos que $K = \frac{1}{2}$ y pot tanto $y_1(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t}$.

En el segundo caso, como $a = 0$ **no** es una raíz de la ecucación característica , ensayamos una solución particular del tipo

$$y_2(t) = K_1 t + K_2 \quad y_2'(t) = K_1 \quad \text{y} \quad y_2''(t) = 0,$$

y así entrando en la ecuación

$$-4K_1 + 4(K_1 t + K_2) = 4K_1 t + (4K_2 - 4K_1) = t$$

de lo que deducimos que $K_1 = \frac{1}{4}$ y que $K_2 = \frac{1}{4}$ y por tanto $y_2(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$.

De la proposición anterior tenemos que

$$y_0(t) = 2y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = t^2e^{2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}$$

es una solución particular del problema $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \frac{t}{2}$. Y su solución general es

$$y(t) = t^2 e^{2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{8} + Ae^{2t} + Bte^{2t} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es