ÁLGEBRA LINEAL.

Aplicaciones Lineales. Introducción.

En un curso de Cálculo Elememtal se estudian funciones de una variable real

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Las más sencillas de estas funciones son las que tienen por gráficas rectas

$$y = f(x) = ax + b.$$

Además se estudia que si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $x = a$, entonces

$$f(x) \sim f'(a)(x - a) + f(a) \text{ (la recta tangente) si } \quad x \sim a.$$

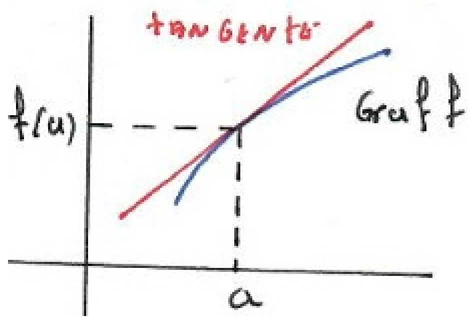

Figura 1. Aproximación lineal de una gráfica.

Para hacer modelos en distintas ciencias se necesitan otras funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y que toman valores en $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 1. *Las funciones*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y, x) & \to & f(x, y, x) \end{array}$$

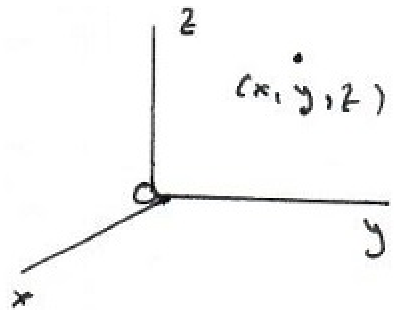

FIGURA 2. A cada (x, y, z) le corresponde el escalar $f(x, y, z)$.

son llamadas ***potenciales*** *en Física.*

Ejemplo 2. *Las funciones*

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x, y, x) & \to & F(x, y, x) \end{array}$$

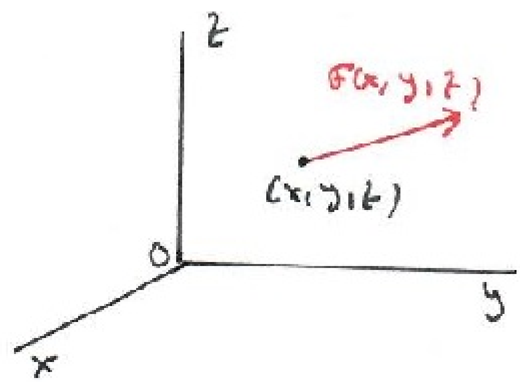

FIGURA 3. A cada (x, y, z) le corresponde una fuerza $F(x, y, z)$.

son llamadas ***campos de fuerzas*** *en Física.*

Entre este tipo de funciones entre espacios vectoriales

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

las llamadas **Aplicaciones Lineales** son las más sencillas. Además, para cualquier otra función F, si es "derivable" (en algún sentido), la función F se puede aproximar por una función lineal (como en el caso $n = m = 1$).

Ejemplo 3. ***Función de coste***. *Una tienda vende n productos a los precios a_i por unidad de producto $i = 1, 2, ..., n$. ¿Cuál es el coste de adquirir x_i unidades de los productos $i = 1, 2, ..., n$?*

Demostración:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_, ..., x_n) & \to & f(x_1, ..., x_n) \ = \ \sum_{i=1}^n a_i x_i. \end{array}$$

Esta aplicación es de tipo lineal (como veremos). Si $n = 1$, entonces $f(x_1) = a_1 x_1$ $\square$

Ejemplo 4. *Sea $A \in M_{n\times m}$ y definimos la aplicación*

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x = (x_1, x_, ..., x_m) & \to & T(x) \ = \ Ax. \end{array}$$

Demostración: Observemos que de las propiedades del producto de matrices se tiene que:

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)$$

y

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda T(x)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ $\square$

Ejemplo 5.

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x, y) & \to & f(x, y) \ = \ (2x + y, 0, 2y + x). \end{array}$$

Demostración: en este caso vemos que

$$f(x, y) = (2x + y, 0, 2y + x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \square$$

Definición 1. *Sean V y W dos espacios vectoriales. Una aplicaciáon*

$$f : V \to W$$

*se dice que es una **Aplicación Lineal** si para todo $v, u \in V$ y para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que*

- $$f(v + u) = f(v) + f(v).$$
- $$f(\lambda v) = \lambda f(v)$$
- *y en general*
$$f(\lambda v + \beta u) = \lambda f(v) + \beta f(u).$$

Ejemplo 6.
- *Tomamos $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial de dimensión n.*

- *Tomamos* $\mathbb{R}$ *un espacio vectorial de dimensión* 1.

Definimos:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_, ..., x_n) & \to & f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \end{array}$$

donde $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *son valores conocidos.* f *es una aplicación lineal.*

Observemos que si $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *y* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *entonces*

$$f(x) =< a, x >= (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Demostración: Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x + \beta y) = f((\lambda x_1 + \beta y_1, ..., \lambda x_n + \beta y_n)) =$$
$$\sum_{i=1}^n a_i(\lambda x_i + \beta y_i) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda x_i + a_i \beta y_i =$$
$$\lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n a_i y_i = \lambda f(x) + \beta f(y) \qquad \square$$

Ejemplo 7. *Se considera la aplicación*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x, y, z) & \to & f(x, y, z) = (z + y, x + z, y + x). \end{array}$$

f *es una aplicación lineal.*

Demostración: Obsevemos que f se puede escribir de forma matricial por

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ahora, $A \in M_{3\times3}$ y por las propiedades de la multiplicación de matrices, para todo $v, u \in \mathbb{R}^3$ y para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$f(\lambda v + \beta u) = A(\lambda v + \beta u) =$$
$$\lambda Av + \beta Au = \lambda f(v) + \beta f(u).$$

Podemos observar que en esta demostracción no importa quien sea la matriz particular A $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`